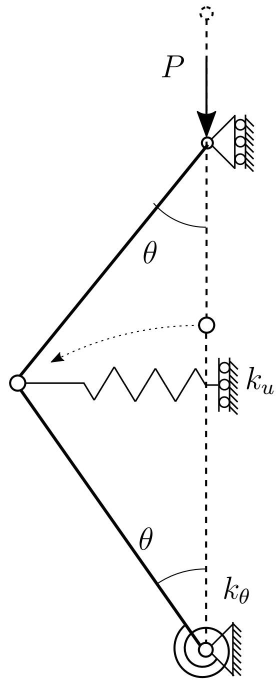
**Análisis No Lineal de Estructuras**
**Prueba escrita - curso 2019**
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

## Ejercicio 1

Se considera la estructura mostrada en la figura. Las barras son perfectamente rígidas y los resortes elásticos lineales con constantes elásticas dadas en la figura. La estructura es perfecta, es decir recta y sin tensiones en los resortes cuando $P = 0$ y $\theta = 0$.




Se sugiere trabajar con los grados de libertad indicados en la figura, pero se aceptan grados de libertad alternativos.

a) Escribir la expresión de la energía potencial total para la estructura dada y bosquejar la curva carga-desplazamiento fundamental ($P \geqslant 0$).

b) Determinar la carga crítica y el o los modos de pandeo correspondientes.

c) Determinar cuál es la condición que debe cumplir $k_\theta$ para que, al alcanzar la carga crítica, el tipo de bifurcación sea estable. Sugerencia: utilizar que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{\theta}{\sin(\theta)} \right) = \frac{1}{3}$$

## Ejercicio 2

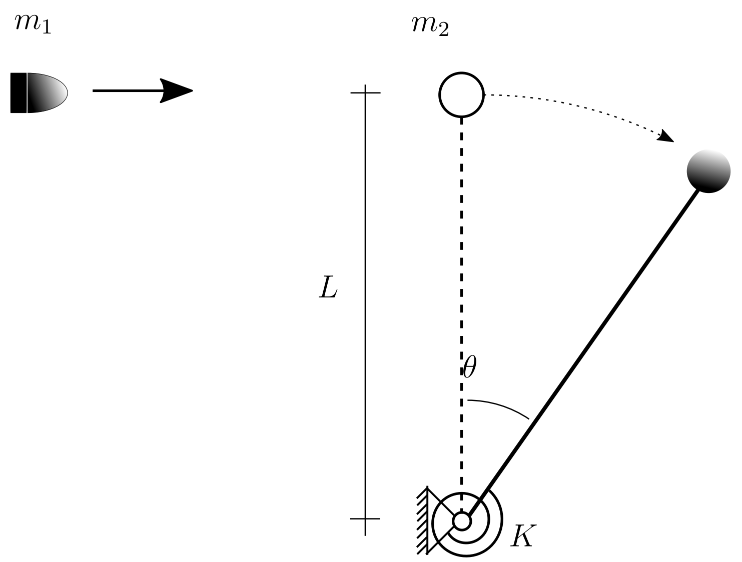
Se tiene una estructura cuyo vector de fuerzas internas está dado por $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u})$, donde $\mathbf{u}$ es un vector columna de tamaño $n$ con los desplazamientos nodales incógnitas. Se quiere encontrar los desplazamientos de equilibrio de la estructura para una cierta carga cuasi-estática dada por el vector de fuerzas externas $\mathbf{f}_{ext}$. La condición de equilibrio está dada por el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{ext} = 0.$$

Asumiendo que existe el equilibrio estable de la estructura y que usted cuenta con una estimación de la solución dada por $\mathbf{u}^{(0)}$: presente un método iterativo para la resolución del sistema de ecuaciones no lineales y al menos dos criterios de parada.

**Ejercicio 3**

Se considera el sistema estructural mostrado en la figura, donde en el instante $t = 0$ el proyectil de masa $m_1$ impacta sobre la masa $m_2$ con velocidad $v$. El impacto es inelástico, es decir, que la masa $m_2$ y el proyectil se mueven en conjunto a partir del impacto (su velocidad para a ser la misma). Se considera la acción de la gravedad.




$g = 9{,}81$ m/s$^2$
$m_1 = 0{,}1$ kg
$m_2 = 5$ kg
$L = 3$ m
$K = 300$ Nm/rad
$v = 100$ m/s

Utilizando el principio de D'Alembert, se puede mostrar que la ecuación que regula el movimiento luego del impacto para cualquier magnitud de $\theta$ es:

$$(m_1 + m_2)L^2\ddot{\theta}(t) + K\theta(t) - (m_1 + m_2)gL\sin(\theta(t)) = 0. \tag{1}$$

Se pide:

a) Encontrar la expresión de la frecuencia angular de vibración del conjunto masa-proyectil respecto a la configuración de equilibrio ($\theta = 0$) para pequeños valores de $\theta$.

b) Se integrará en el tiempo usando el Método de Diferencias Centradas con $\Delta t = 0{,}25$ s. Estimar el $\Delta t_{cr}$ y estudiar la estabilidad del método para el problema considerado.

c) Utilizar la discretización de diferencia centrada en la Ecuación (1) y obtener la expresión explícita para calcular la solución numérica del problema.

d) Para poder iniciar el Método de Diferencia Centrada, se considera la siguiente aproximación de $\theta_{-\Delta t}$:

$$\theta_{-\Delta t} = \theta_0 - \dot{\theta}_0\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_0\Delta t^2$$

calcule (o estime) los valores $\dot{\theta}_0$ y $\ddot{\theta}_0$, y utilícelos para obtener $\theta_{-\Delta t}$.

e) Obtener numéricamente los valores $\theta$ para los tiempos desde $t = 0$ hasta $t = 1{,}25$ s (inclusive), utilizando el incremento indicado en la parte b).

# Solución

**Ejercicio 1**

a) Energía potencial total

$$V(\theta) = \frac{1}{2}k_u L^2 \sin(\theta)^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 - P(2L - 2L\cos(\theta))$$

b) Considerando la aproximación de segundo órden de la energía se tiene

$$V(\theta) = \frac{1}{2}k_u L^2 \theta^2 + \frac{1}{2}k_\theta \theta^2 - P2L\frac{1}{2}\theta^2$$

la derivada de la energía está dada por:

$$V'(\theta) = (k_u L^2 + k_\theta)\theta - P2L\theta$$

por lo tanto se debe cumplir

$$(k_u L^2 + k_\theta - 2PL)\theta = 0$$

por lo tanto

$$\theta = 0$$

Por otra parte, la derivada segunda está dada por:

$$V''(\theta) = k_u L^2 + k_\theta - 2PL$$

por lo que la carga crítica está dada por

$$\boxed{P_{cr} = \frac{k_u L^2 + k_\theta}{2L}}$$

Este mismo resultado también puede ser obtenido sin realizar la aproximación de segundo orden.

Respecto a los modos, dado que el sistema tiene un único grado de libertad, el modo de pandeo es uno y corresponde a la deformada que se muestra en la letra del problema ($\theta = 1$).

c) Se vuelve a trabajar con la expresión de la energía potencial total sin aproximación

$$V'(\theta) = k_u L^2 \sin(\theta)\cos(\theta) + k_\theta \theta - 2PL\sin(\theta)$$

y se calcula la relación carga-desplazamiento de equilibrio despejando de la condición $v'(\theta) = 0$, obteniendo:

$$P(\theta) = \frac{k_u L^2 \sin(\theta)\cos(\theta) + k_\theta \theta}{2L\sin(\theta)} = \frac{1}{2}k_u L\cos(\theta) + \frac{1}{2L}k_\theta \frac{\theta}{\sin(\theta)}$$

Calculando las derivadas e imponiendo la condición:

$$\lim_{\theta \to 0} P''(\theta) > 0$$

se obtiene la conclusión

$$\boxed{k_\theta > 3k_u L^2}$$

Al verificarse la condición anterior, la bifurcación se corresponde con dos ramas estables y una rama inestable que continua la fundamental luego de superar la carga crítica. La suavidad de la función de energía potencial total es la que garantiza que las ramas simétricas de la bifurcación sean estables.

**Ejercicio 2** ver apuntes.

**Ejercicio 3**

a) Dado que se desea tener una estimación para pegueños ángulos, se linealiza la ecuación, obteniendo

$$(m_1 + m_2)L^2\ddot{\theta} + K\theta - (m_1 + m_2)gL\theta = 0$$

Dada la condición inicial $\theta(0) = 0$ se puede considerar directamente una solución de la forma $\theta(t) = A\sin(\omega t)$. Sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$\left[-\omega^2(m_1 + m_2)L^2 + K - (m_1 + m_2)gL\right]\sin(\omega t)A = 0$$

usando que $\sin(\omega t) \neq 0$ se tiene que necesariamente se debe cumplir

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K - (m_1 + m_2)gL)}{(m_1 + m_2)L^2}} = 1{,}807\,\mathrm{rad/s}}$$

**b)** Se recuerda la definición de $\Delta t_{cr}$ del Método de Diferencia Centrada para un problema lineal:

$$\Delta t_{cr} = \frac{T_0}{\pi}$$

Usando la parte anterior y los parámetros, se calcula $T_0$:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 3{,}474\,\mathrm{s}$$

Se tiene entonces

$$\Delta t_{cr} = 1{,}1\,\mathrm{s} > 0{,}25\,\mathrm{s} = \Delta t.$$

El problema que se resuelve es no lineal, por lo que esta verificación no es una garantía de estabilidad numérica, si no que es una indicación fuerte de que no habrían problemas de estabilidad numérica.

**c)** Dado que se comienza a trabajar en la solución numérica, se utiliza el subíndice $t$ para indicar el tiempo correspondiente a las magnitudes.

La aproximación de diferencia centrada para la aceleración es:

$$\ddot{\theta}_t = \frac{\theta_{t+\Delta t} - 2\theta_t + \theta_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento y despejando $\theta_{t+\Delta t}$ se tiene:

$$\boxed{\theta_{t+\Delta t} = \left[2 - \frac{K\Delta t^2}{(m_1 + m_2)L^2}\right]\theta_t - \theta_{t-\Delta t} + \frac{g\Delta t^2}{L}\sin(\theta_t)}$$

**d)** Por conservación de cantidad de movimiento se tiene la velocidad inicial de las masas acopladas es:

$$v_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v$$

por lo que la velocidad angular inicial es:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{L} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{v}{L} = 0{,}654\,\mathrm{rad}/s$$

A partir de la ecuación que gobierna el movimiento y sustituyendo $\theta_0 = 0$ se tiene que $\ddot{\theta}_0 = 0$.

Usando estos valores en la expresión dada en la letra y $\Delta t = 0{,}25$s, se tiene que:

$$\boxed{\theta_{-\Delta t} = -0{,}163\,\mathrm{rad}}$$

**e)** Usando las partes anteriores se tienen los valores numéricos de la solución numérica

| $k$ | $t$ | $\theta_t$ |
|---|---|---|
| -1 | -0.25 | -0.163 |
| 0 | 0.00 | 0.000 |
| 1 | 0.25 | 0.163 |
| 2 | 0.50 | 0.293 |
| 3 | 0.75 | 0.362 |
| 4 | 1.00 | 0.356 |
| 5 | 1.25 | 0.275 |

Se verifica que la solución es estable numéricamente.