

Estudio de no linealidad en cargas, Fenómeno de aleteo o "Flutter"

Santiago Correa

1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo el análisis de no linealidad de cargas utilizando como caso de estudio el Péndulo Doble de Ziegler. Se realiza el abordaje analítico del caso de estudio mediante el Principio de los Trabajos Virtuales [1] que permite obtener la ecuación de movimiento del sistema y el posterior estudio de la inestabilidad del mismo. Se realiza un abordaje analítico del caso de estudio que permite estudiar los límites de la inestabilidad para luego realizar un estudio de la solución numérica generada por dos metodos; con el paquete de soluciones ODE45 parte del programa MATLAB y con la implementación del método de resolución Runge-Kutta de cuarto orden [2], implementada en el programa MATLAB.

2. Inestabilidad por Aleteo o "Flutter"

El aleteo o "Flutter" es un fenómeno de inestabilidad elástica en el cual el desplazamiento de la estructura presenta un incremento de amplitud que pasa inadvertido en modelos estáticos [3]. Este es un fenómeno presente cuando las cargas estructurales son colineales con la estructura o acompañan la dirección de deformación de la misma como se muestra en la Figura 1, en la misma se ejemplifican los tres casos principales de estudio teórico para este tipo de cargas. Dado que estas fuerzas son del tipo no conservativas la estructura se vuelve dinámicamente inestable a cierto nivel de cargas y presenta un problema de divergencia en la estabilidad a un nivel de cargas elevados (incremento exponencial en el movimiento de la estructura). [4]

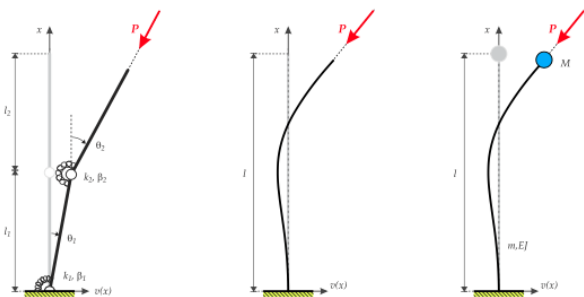


Figura 1: Fenómeno de Inestabilidad por Aleteo o "flutter". Ejemplos: (Izquierda) Péndulo Doble de Ziegler ([5], 1952). (Centro) Columna de Beck ([6], 1952). (Derecha) Columna de Pfluger ([7], 1955).

Este es un tema de estudio de especial interés en problemas de interacción fluido estructura, por ejemplo en el análisis aeroelástico de estructuras sobre las cuales este tipo de cargas puede llevar a la inestabilidad de la misma.

2.1. Péndulo Doble de Ziegler caso ideal

El Péndulo Doble de Ziegler con cargas conlineales a la estructura es uno de los ejemplos mas estudiados en lo que refiere a la inestabilidad por aleteo [4], [8], [9]. Este modelo esta compuesto por dos barras rígidas de densidad ρ por unidad de largo conectadas por un resorte elástico de torsión y fijadas a una estructura fija mediante otro resorte de torsión como se muestra en la Figura 2, ambos resortes tienen constante $K_1 = K_2 = K$.

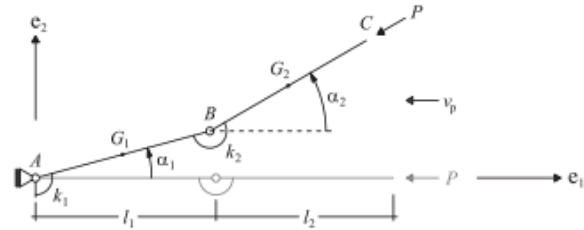


Figura 2: Péndulo Doble de Ziegler

2.1.1. Principio de los Trabajos Virtuales

Como se observa en la Figura 2 los dos grados de libertad que definen el movimiento del sistema están definida por los parámetros α_1 y α_2 y la fuerza externa \mathbf{P} es colonial a la barra \mathbf{BC} para cualquier variación en la posición de los nodos de la barra. Para determinar la ecuación de movimiento que gobierna el sistema se aplica el Principio de los Trabajos Virtuales sobre el mismo, para lo cual se aplican perturbaciones virtuales arbitrarias admisibles $\delta\alpha_1$ y $\delta\alpha_2$ como se observa en la Figura 3

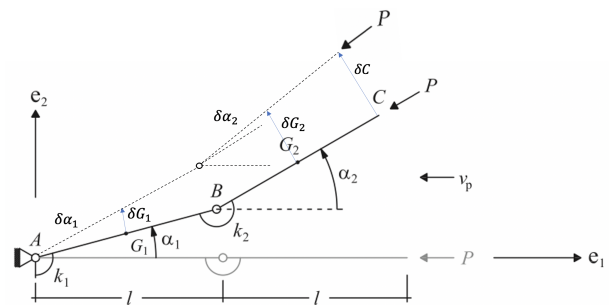


Figura 3: Sistema con desplazamiento virtual aplicado [4]

Considerando barras son rígidas y que la masa de las mismas pueden ser calculadas como fuerzas concentradas en los centros de masa G_1 y G_2 , la variación del trabajo de las fuerzas existentes sobre el sistema puede ser expresado como:

$$\delta W = P \cdot \delta C - K\alpha_1\delta\alpha_1 - K(\alpha_2 - \alpha_1)(\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1) - \rho l \ddot{G}_1 \cdot \delta G_1 - \rho l \ddot{G}_2 \cdot \delta G_2 - \frac{l^3}{12} \rho \ddot{\alpha}_1 \delta\alpha_1 - \frac{l^3}{12} \rho \ddot{\alpha}_2 \delta\alpha_2 \quad (1)$$

Considerando la posición genérica del punto **C** donde se aplica la carga **P**, el centro de masa G_1 y G_2 de las barra 1 y 2 respectivamente, así cómo sus diferenciales de desplazamiento pueden ser expresados en coordenadas cartesianas, se obtiene de esta forma:

$$C = l(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)\vec{u}_1 + l(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)\vec{u}_2 \quad (2)$$

$$\delta C = -l(\sin \alpha_1 \delta \alpha_1 + \sin \alpha_2 \delta \alpha_2)\vec{u}_1 + l(\cos \alpha_1 \delta \alpha_1 + \cos \alpha_2 \delta \alpha_2)\vec{u}_2 \quad (3)$$

$$G_1 = \frac{l}{2}(\cos \alpha_1)\vec{u}_1 + \frac{l}{2}(\sin \alpha_1)\vec{u}_2 \quad (4)$$

$$\delta G_1 = -\frac{l}{2}(\sin \alpha_1 \delta \alpha_1)\vec{u}_1 + \frac{l}{2}(\cos \alpha_1 \delta \alpha_1)\vec{u}_2$$

$$G_2 = l(\cos \alpha_1 + \frac{1}{2} \cos \alpha_2)\vec{u}_1 + l(\sin \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin \alpha_2)\vec{u}_2 \quad (6)$$

$$\delta G_2 = -l(\sin \alpha_1 \delta \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin \alpha_2 \delta \alpha_2)\vec{u}_1 + l(\cos \alpha_1 \delta \alpha_1 + \frac{1}{2} \cos \alpha_2 \delta \alpha_2)\vec{u}_2 \quad (7)$$

Utilizando la expresión de la posición material de los centros de masa de las barras rígidas se puede determinar la aceleración de las mismas:

$$\ddot{G}_1 = -\frac{l}{2}(\cos \alpha_1 \dot{\alpha}_1^2 + \sin \alpha_1 \ddot{\alpha}_1)\vec{u}_1 + \frac{l}{2}(\cos \alpha_1 \ddot{\alpha}_1 - \sin \alpha_1 \dot{\alpha}_1^2)\vec{u}_2 \quad (8)$$

$$\ddot{G}_2 = -l[(\cos \alpha_1 \dot{\alpha}_1^2 + \sin \alpha_1 \ddot{\alpha}_1) + \frac{1}{2}(\cos \alpha_2 \dot{\alpha}_2^2 + \sin \alpha_2 \ddot{\alpha}_2)]\vec{u}_1 + l[(\cos \alpha_1 \ddot{\alpha}_1 - \sin \alpha_1 \dot{\alpha}_1^2) + \frac{1}{2}(\cos \alpha_2 \ddot{\alpha}_2 - \sin \alpha_2 \dot{\alpha}_2^2)]\vec{u}_2 \quad (9)$$

Al definir la fuerza P como la descomposición vectorial de la dirección de la barra BC , $P = -P(\cos \alpha_2 \vec{u}_1 + \sin \alpha_2 \vec{u}_2)$, sustituyendo 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 1 y operando con el producto interno obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que definen la Ecuación de Movimiento del Sistema en las variables α_1, α_2 :

$$\frac{4\rho l^3}{3}\ddot{\alpha}_1 + \frac{\rho l^3}{2}\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\rho l^3}{2}\dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + 2k\alpha_1 - k\alpha_2 - Pl \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\rho l^3}{3}\ddot{\alpha}_2 - \frac{\rho l^3}{2}\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\rho l^3}{2}\ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - k(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad (11)$$

2.1.2. Solución analítica del Péndulo Doble de Ziegler

(5) Las ecuaciones 10 y 11 definen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y acoplado. Para resolver el mismo de forma analítica es necesario en primera instancia linearizar el sistema para pequeños giros entorno a la configuración de equilibrio trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Para esto se aplica el Teorema de Taylor que permite hallar una aproximación lineal de primer orden de una función.

$$f(U) = f(u_{eq}) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{u_{eq}}(U - u_{eq}) \quad (12)$$

Obteniendo de esta forma el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\frac{4\rho l^3}{3}\ddot{\alpha}_1 + \frac{\rho l^3}{2}\ddot{\alpha}_2 + 2k\alpha_1 - k\alpha_2 - Pl(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\rho l^3}{3}\ddot{\alpha}_2 + \frac{\rho l^3}{2}\ddot{\alpha}_1 - k(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad (14)$$

o en su forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{4\rho l^3}{3} & \frac{\rho l^3}{2} \\ \frac{\rho l^3}{2} & \frac{\rho l^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pl & -Pl \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para determinar las solución armónicas en un entorno del punto de equilibrio ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), se asumen soluciones del tipo:

$$\alpha_k = A_k e^{i\omega t} \quad k = 1, 2 \quad (16)$$

Siendo A_k la amplitud del movimiento de cada variable y ω la frecuencia de oscilación de las soluciones [10]. Sustituyendo la solución planteada en el sistema de ecuaciones 15 obtenemos:

$$\begin{bmatrix} (\frac{4\Omega^2}{3} - 2 + \lambda) & (\frac{\Omega^2}{2} + 1 - \lambda) \\ (\frac{\Omega^2}{2} + 1) & (\frac{\Omega^2}{3} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Definiendo de esta forma

$$A = \begin{bmatrix} (\frac{4\Omega^2}{3} - 2 + \lambda) & (\frac{\Omega^2}{2} + 1 - \lambda) \\ (\frac{\Omega^2}{2} + 1) & (w^2 \frac{\Omega^2}{3} - 1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

y las variables,

$$\Omega^2 = w^2 \frac{\rho l^3}{k} \text{ y } \lambda = \frac{Pl}{k}$$

Analizando el sistema de ecuaciones podemos observar que existen dos soluciones para un conjunto de parámetros definidos. Por un lado $A_1 = A_2 = 0$ solución trivial al sistema de ecuaciones diferenciales, por otro lado la solución armónica que define $\det(A) = 0$. Imponiendo esta segunda condición se obtiene la ecuación característica de la forma:

$$7\Omega^4 + 6\Omega^2(5\lambda - 18) + 36 = 0 \quad (19)$$

Esta ecuación es cuadrática en Ω por lo que sus raíces quedan definidas por:

$$\Omega^2 = \frac{3}{7}(-(\lambda - 18) \pm \sqrt{((5\lambda - 18)^2 - 28)}) \quad (20)$$

El análisis del termino $((5\lambda - 18)^2 - 28)$ permite determinar que λ presenta raíces de la forma:

$$\lambda = \frac{18 \pm 2\sqrt{7}}{5} \quad (21)$$

Por lo que se definen valores críticos de estabilidad de la solución para cargas P ,

$$\frac{18 - 2\sqrt{7} k}{5 l} < P < \frac{18 + 2\sqrt{7} k}{5 l} \quad (22)$$

Los limites de carga P definidos en la desigualdad 22 permiten analizar tres comportamientos para la solución del sistema

- Si $P < \frac{18 - 2\sqrt{7} k}{5 l}$ el sistema presenta 4 raíces reales, por lo que la solución del sistema es del tipo sinusoidal, lo que corresponde con la solución del tipo **estable**.
- Si $\frac{18 - 2\sqrt{7} k}{5 l} < P < \frac{18 + 2\sqrt{7} k}{5 l}$, las frecuencias ω solución del sistema serán complejas conjugadas, lo que corresponde con una solución sinusoidal que incrementa su amplitud, condición que satisface la inestabilidad por aleteo o "**flutter**".
- Si $P > \frac{18 + 2\sqrt{7} k}{5 l}$, las frecuencias ω solución del sistema serán complejas puras por lo que la solución del sistema sera combinación lineal de funciones exponenciales, lo que corresponde con una solución **inestable**.

2.1.3. Solución numérica de la Ecuación de Movimiento

A partir del sistema lineal de ecuaciones definido en un entorno del punto de equilibrio es posible hallar mediante el programa MATLAB la solución numérica a la ecuación de movimiento. Para esto se utiliza la función solver ODE45 que permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs por sus siglas en ingles), utilizando el método Runge-Kutta con un paso temporal variable [11]. Se implementa para evaluar la validez de la solución numérica previa el método de resolución Runge-Kutta de 4to orden y se comparan los resultados para los cuales no se observa ninguna diferencia numérica.

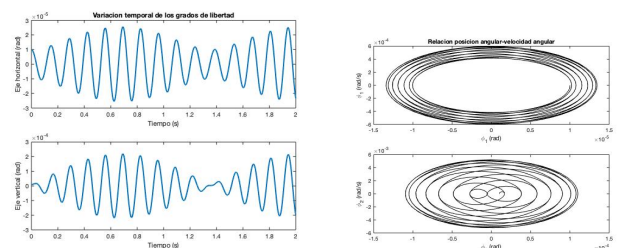
Para implementar tanto la función ODE45 de MATLAB así como el método Runge-Kutta de 4to orden es necesario en primera instancia reformular el sistema de ecuaciones diferenciales para expresar el mismo de la forma matricial $\dot{X} = AX$, para esto se definen los siguientes cambios de variable:

$$u = \alpha_1, v = \alpha_2, w = \dot{\alpha}_1, z = \dot{\alpha}_2 \quad (23)$$

por lo que el sistemas de ecuaciones expresado en su nueva forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{7\rho l^3}(2Pl - 7k) & \frac{6}{7\rho l^3}(5k - 2Pl) & 0 & 0 \\ \frac{6}{7\rho l^3}(14k - 3Pl) & \frac{6}{7\rho l^3}(3Pl - 11k) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad (24)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones para pequeños desplazamientos respecto de la posición de equilibrio ($\alpha_1(0) = 0,00001$, $\alpha_2(0) = 0,00001$, $\dot{\alpha}_1(0) = 0$, $\dot{\alpha}_2(0) = 0$). Se definen los parámetros del sistema $k = 100 \frac{Nm}{rad}$ y $l = 0,1m$ observando el siguiente comportamiento para valores de cargas variados:



(a) Curvas de desplazamiento (b) Velocidad-Desplazamiento

Figura 4: Variables: $k = 100 \frac{Nm}{rad}$, $l = 0,1m$ $P = 2000N$

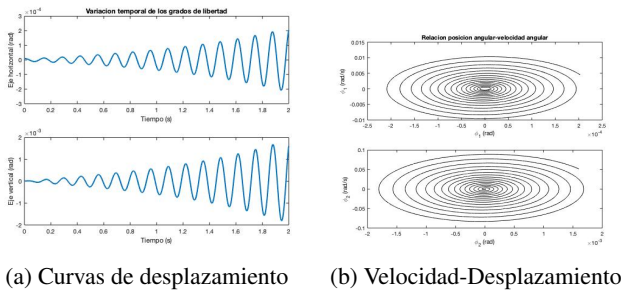


Figura 5: Variables: $k = 100 \frac{Nm}{rad}$, $l = 0,1m$ $P = 2542$

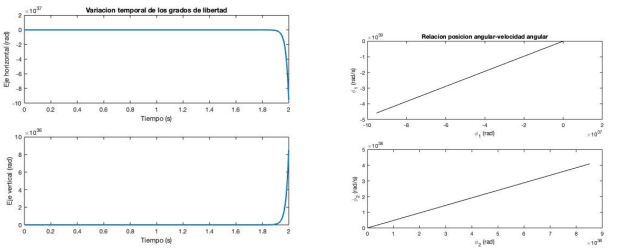


Figura 6: Variables: $k = 100 \frac{Nm}{rad}$, $l = 0,1m$ $P = 4700$

El límite de la estabilidad para los parámetros indicados queda definido por el rango $2542N < P < 4658N$. Al analizar el comportamiento de la solución para una carga $P = 2000N$ por debajo de carga límite de estabilidad en la figura 4, se observa un comportamiento oscilatorio característico de una solución exponencial con frecuencia angular w real con parte imaginaria nula. Esta solución queda definida por lo tanto por 4 modos de oscilación sinusoidales como se observa en la figura en cuestión. Es de especial interés observar el comportamiento de los grados de libertad α_1 y α_2 en la figura 5 para un valor de carga $P = 2542N$, dado que este es valor del límite inferior de inestabilidad por aleteo. En este caso particular se observa el comportamiento esperado, en el cual la amplitud de la solución oscilatoria presenta un incremento exponencialmente correspondiente a una solución exponencial con valores de frecuencia w compleja conjugada con parte real e imaginaria. Por ultimo, el estudio de la figura 6 permite observar un claro comportamiento inestable con una rápida divergencia respecto al punto de equilibrio del sistema para el valor de $P = 4700N$. Esto corresponde a una solución exponencial cuya frecuencia angular w es puramente imaginaria comportamiento esperado de la solución.

El análisis de la solución en el espacio de la frecuencia permite analizar las variaciones de las soluciones del sistema para distintos valores de carga P aplicada.

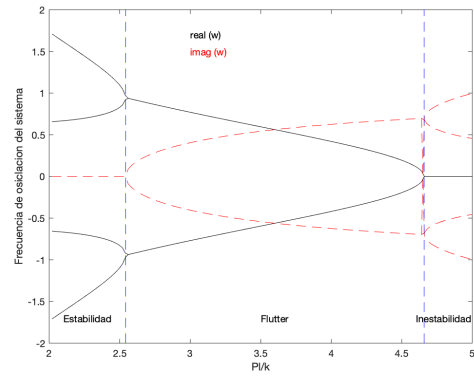


Figura 7: Frecuencias en función de Pl/k

La Figura 7 permite validar las conclusiones analíticas y numéricas obtenidas previamente:

- Para valores de carga menores al límite inferior de la desigualdad presentada en 22 el sistema posee 4 raíces reales, 2 positivas y 2 negativas por lo que la solución es del tipo sinusoidal y el sistema presenta un comportamiento estable.
- Para valores de carga entre los límites teóricos definidos la solución presenta dos pares de raíces complejas conjugadas por lo que la solución presentará un comportamiento sinusoidal con un incremento exponencial de la amplitud, comportamiento correspondiente a la inestabilidad por Flutter.
- Para valores de carga superiores al límite superior de la ecuación 22 se obtienen 4 raíces complejas puras por lo que la solución del problema es del tipo exponencial presentando divergencia.

2.2. Péndulo doble de Ziegler con amortiguamiento viscoso

Un abordaje similar al realizado para el caso ideal, es posible llevar a cabo al considerar que cada resorte cuenta con un componente disipativa o amortiguamiento viscoso β_1 y β_2 como se muestra en la siguiente figura.

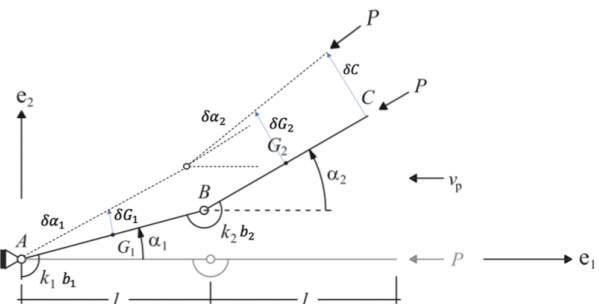


Figura 8: Péndulo Doble de Ziegler con amortiguamiento viscoso [4]

2.2.1. Resolución analítica del Péndulo Doble con componente disipativa

Considerando que el trabajo de esta nueva componente puede expresarse de forma proporcional a la velocidad angular del sistema, el Principio de Trabajos Virtuales para el sistema es planteado de la forma:

$$\begin{aligned} \delta W = & P \cdot \delta C - K\alpha_1\delta\alpha_1 - \beta\dot{\alpha}_1\delta\alpha_1 \\ & - \beta(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1)(\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1)(\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1) \\ & - K(\alpha_2 - \alpha_1)(\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1) - \rho l \ddot{G}_1 \cdot \delta G_1 \\ & - \rho l \ddot{G}_2 \cdot \delta G_2 - \frac{l^3}{12}\rho\ddot{\alpha}_1\delta\alpha_1 - \frac{l^3}{12}\rho\ddot{\alpha}_2\delta\alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Operando sobre la ecuación del Principio de los Trabajos Virtuales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{4\rho l^3}{3}\ddot{\alpha}_1 + \frac{\rho l^3}{2}\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ - \frac{\rho l^3}{2}\dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + 2k\alpha_1 + 2\beta\dot{\alpha}_1 \\ - k\alpha_2 - \beta\dot{\alpha}_1 - Pl \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho l^3}{3}\ddot{\alpha}_2 - \frac{\rho l^3}{2}\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ + \frac{\rho l^3}{2}\dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - k(\alpha_1 - \alpha_2) \\ - \beta(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Que en su forma matricial puede ser expresado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{4\rho l^3}{3} & \frac{\rho l^3}{2} \\ \frac{\rho l^3}{2} & \frac{\rho l^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pl & -Pl \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Imponiendo soluciones de la forma:

$$\alpha_k = A_k e^{i\omega t} \quad k = 1, 2 \quad (29)$$

Se obtiene el siguiente sistemas matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (-\frac{4\Omega^2}{3} + 2\Omega\nu - \lambda + 2) & (\frac{\Omega^2}{2} - \Omega\nu - 1 + \lambda) \\ (\frac{\Omega^2}{2} - \Omega\nu - 1) & (\frac{\Omega^2}{3} + \Omega\nu + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

Siendo

$$\begin{aligned} \Omega = -i\omega \sqrt{\frac{l^3 \rho}{k}} \\ \nu = \sqrt{\frac{\beta^2}{\rho l^3 k}} \end{aligned} \quad (31)$$

$$A = \begin{bmatrix} (\frac{4\Omega^2}{3} + 2\Omega\nu - \lambda + 2) & (\frac{\Omega^2}{2} - \Omega\nu - 1 + \lambda) \\ (\frac{\Omega^2}{2} - \Omega\nu - 1) & (\frac{\Omega^2}{3} + \Omega\nu + 1) \end{bmatrix} \quad (32)$$

Imponiendo $\det(A) = 0$ se determina la frecuencia solución del sistema de ecuaciones. La ecuación característica que se obtiene para dicho sistema es un polinomio de grado 4 con la siguiente forma

$$\Omega^4 \frac{7}{36} + \Omega^3 3\nu + \Omega^2 (3 + \nu^2 - \frac{5\lambda}{6}) + 2\Omega\nu + 1 = 0 \quad (33)$$

Se utiliza el criterio de estabilidad de Routh–Hurwitz [12] para determinar la carga crítica de estabilidad del sistema. Este algoritmo permite determinar la existencia de raíces o polos en el semiplano derecho del plano complejo, donde si al menos existe una raíz en el mismo el sistema es inestable. Para esto se opera con los coeficientes del polinomio característico para llegar a la siguiente expresión:

$$\lambda < (9 - \frac{7}{9})\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\nu \quad (34)$$

Resultando en la carga crítica de estabilidad:

$$P_{critica} < (9 - \frac{7}{9})\frac{1}{5} \frac{k}{l} + \frac{6}{5} \frac{\beta^2}{\rho l^4} \quad (35)$$

El estudio de este fenómeno en el límite cuando β tiende a 0 debería acercar las soluciones del problema con el caso de amortiguado viscoso al caso ideal. Aunque los polinomios característicos del problema convergen al mismo resultado, no pasa lo mismo con los límites de la carga crítica de estabilidad, los cuales no convergen al mismo valor. En este trabajo no se estudia esta discrepancia, por lo que se propone estudiar en trabajos futuros la misma.

2.2.2. Solución Numérica de la Ecuación de Movimiento del Péndulo doble de Ziegler con Amortiguamiento Viscoso

Al igual que para el problema ideal, se resuelve el sistema de ecuaciones para este caso de estudio en torno al punto de equilibrio mediante la implementación en MATLAB del solver ODE45 y el método de resolución Runge-Kutta de 4to orden. Utilizando el mismo cambio

de variables definido previamente y determinando el sistema de ecuaciones diferenciales matricial de primer orden se determina el desplazamiento angular de cada grado de libertad

$$u = \alpha_1, v = \alpha_2, w = \dot{\alpha}_1, z = \dot{\alpha}_2 \quad (36)$$

por lo que el sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden expresado en su nueva forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \frac{6}{7\rho l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{7\rho l^3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7\rho l^3}{6} \\ (2Pl - 7k) & (5k - 2Pl) & -7\beta & 5\beta \\ (14k - 3Pl) & (3Pl - 11k) & 14\beta & -11\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad (37)$$

Definiendo el siguiente conjunto de variables, $\rho = 700 \frac{kg}{m^3}$, $k = 100 \frac{Nm}{rad}$, $\beta = 1 \frac{Nms}{rad}$, $l = 0,1m$, P en un entorno de $P_c = 1660N$, se estudia la respuesta del sistema para pequeños desplazamientos respecto de la posición de equilibrio ($\alpha_1(0) = 0,00001$, $\alpha_2(0) = 0,00001$, $\dot{\alpha}_1(0) = 0,001$, $\dot{\alpha}_2(0) = 0,001$).

En primera instancia se estudia una condición de carga P menor a la del punto crítico de estabilidad, condición para la cual se observa un comportamiento oscilatorio amortiguado entorno al punto de equilibrio presentando a un decaimiento de la amplitud con el paso del tiempo, característico de los sistemas amortiguados estables.

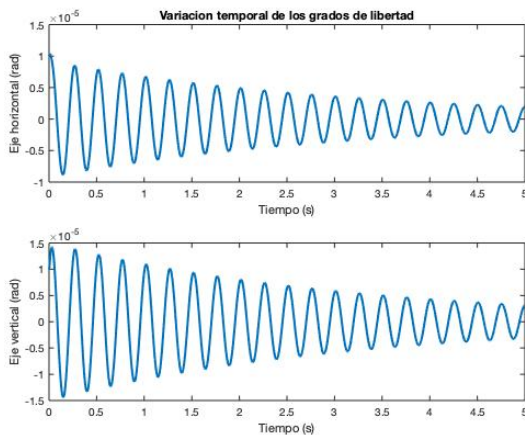


Figura 9: Variación angular entorno al punto de equilibrio, $\rho = 700 \frac{kg}{m^3}$, $k = 100 \frac{Nm}{rad}$, $\beta = 1 \frac{Nms}{rad}$, $l = 0,1m$, $P = 1560N$

En segundo lugar se estudia el caso de estabilidad crítica $P = P_c$, para esta condición se puede observar una oscilación de amplitud constante en el tiempo característica de los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden con amortiguamiento viscoso al encontrarse al límite de la estabilidad.

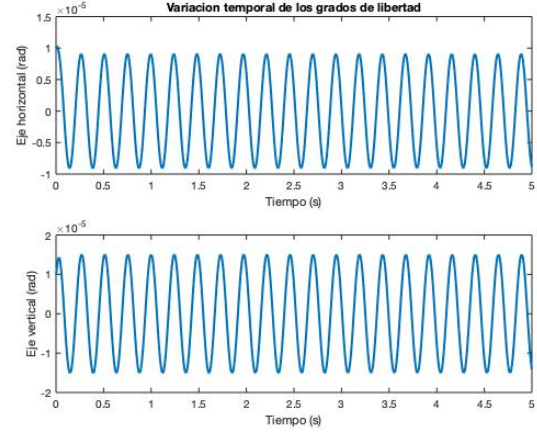


Figura 10: Variación angular entorno al punto de equilibrio, $\rho = 700 \frac{kg}{m^3}$, $k = 100 \frac{Nm}{rad}$, $\beta = 1 \frac{Nms}{rad}$, $l = 0,1m$, $P = 1660N$

Por ultimo, para valores de $P > P_c$ se observan dos tipos de comportamiento inestable

- Por un lado se observar una oscilación con amplitud creciente en el tiempo para valores de carga P superior a la carga crítica y en un entorno superior de la misma.
- Por otro lado, se observa un crecimiento exponencial sin comportamiento oscilatorio para cargar de orden mayor a la carga crítica.

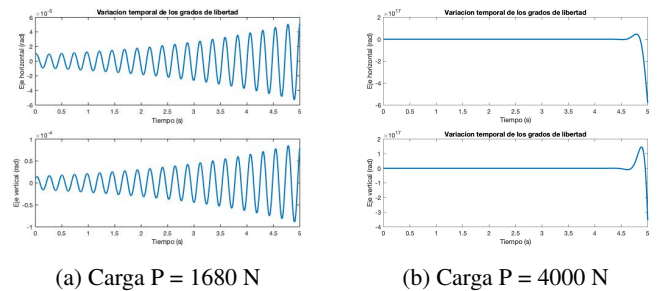


Figura 11: Variación angular entorno al punto de equilibrio, $\rho = 700 \frac{kg}{m^3}$, $k = 100 \frac{Nm}{rad}$, $\beta = 1 \frac{Nms}{rad}$, $l = 0,1m$

Al igual que fue estudiado previamente para el caso del Péndulo ideal de Ziegler, se realiza el análisis de la variable frecuencia para el caso del sistema con amortiguamiento viscoso. Para esto se determinan los valores de frecuencia para distintos valores de carga partiendo de la ecuación 33 obteniéndose el gráfico presentado en 12. El análisis del mismo permite determinar que para valores

de carga inferiores a la carga crítica los valores de frecuencia que son solución de la ecuación de movimiento del sistema presentan parte imaginaria nula o negativa, condición que concuerda con el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz por lo que el resultado analítico es validado mediante el estudio numérico.

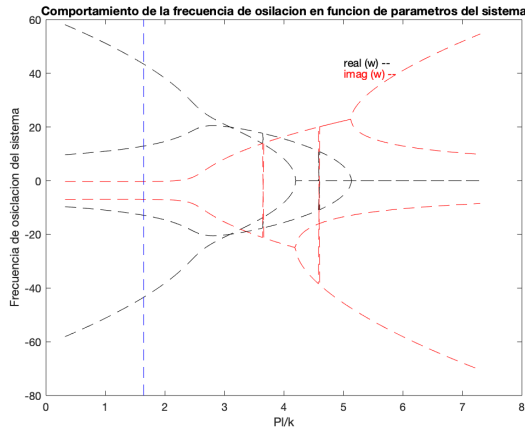


Figura 12: Frecuencia angular - $\frac{PL}{k}$

2.3. Conclusiones y Trabajos Futuros

Se validó analíticamente y numéricamente el modelo teórico del Péndulo Doble de Ziegler, problema de **no linealidad de carga**. En particular fue posible validar el modelo analítico linealizado para pequeños desplazamientos en torno a un punto de equilibrio determinado por medio el Principio de Trabajos Virtuales implementando métodos numéricos de resolución de ecuación diferencial ordinarias en la herramienta MATLAB utilizando el solver ODE45 así como también una implementación de desarrollo propio del método Runge-Kutta de 4to orden.

Tanto el caso ideal como el caso de estudio con amortiguamiento viscoso fueron validados y determinados los valores críticos de carga para los cuales se observa la inestabilidad del sistema. En lo que respecta a la inestabilidad del sistema fue posible discriminar a nivel gráfico la inestabilidad por "flutter" de la inestabilidad convencional que genera divergencia de la solución. Fue posible por lo tanto caracterizar este comportamiento propio de problemas en los cuales la dirección de la carga tiene dependencia directa con la configuración deformada de la estructura.

Queda planteado para futuros trabajos el estudio de estructuras continua bajo la aplicación de cargas cuya dirección sea dependiente de la configuración deformada del sistema, siendo casos de estudio la columna de Beck y la columna de Pflüger.

Referencias

[1] Juan Bruno Bazzano - Jorge Pérez Zerpa *Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras* 2021. Insti-

tuto de Estructura y Transporte, Facultad de Ingeniería, UDELAR

- [2] Ernst Hairer *Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations* University of Geneva
- [3] Davide Bigoni, *Flutter and divergence instability in the Pflüger column: experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox* Journal of the Mechanics and Physics of Solids
- [4] Davide Bigoni and Giovanni Noselli *Experimental evidence of flutter and divergence instabilities induced by dry friction*, 2011. Journal of the Mechanics and Physics of Solids <https://arxiv.org/pdf/1804.07378.pdf>
- [5] H. Ziegler. *Ein nichtkonserviertes Stabilitätsproblem*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 31(8-9):265-266, 1951.
- [6] M. Beck. *Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP 3(3):225-228, 1952
- [7] A. Pflüger. *Zur Stabilität des tangential gedrückten Stabes*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 35(5):191-191, 1955.
- [8] Davide Bigoni and Giovanni Noselli *No-conservative problems Stability of Modern Physics* 2011. Journal of the Mechanics and Physics of Solids <https://arxiv.org/pdf/1804.07378.pdf>
- [9] Quoc-Son Nguyen *STABILITE DES STRUCTURES ELASTIQUES* Laboratoire de Mecanique des Solides Ecole Polytechnique
- [10] Singuiresu, Rao *Vibraciones Mecánicas, quinta edición*, ISBN 978-607-32-0952-6
- [11] L.F. Shampine *Solving ODEs with MATLAB*, 2003. ISBN-03 978-1-500-17717-4
- [12] Katsuhiko Ogata *Ingeniería del control moderno*, 2010 ISBN-13: 978-8483226605