

# Análisis no lineal de pandeo y post-pandeo de arcos

Mihdí Caballero

## Resumen

En este trabajo se estudian estructuras de arcos, realizando un análisis no lineal para determinar la carga crítica de pandeo y el comportamiento carga-desplazamiento post-pandeo de la estructura, realizando un LBA (*Linear Buckling Analysis*) y un NLBA (*Non Linear Buckling Analysis*). Además se estudia la sensibilidad a imperfecciones geométricas de la estructura. Éste análisis se realiza con la implementación de elementos finitos corotacionales como extensión del programa ArchFEM, validando la herramienta desarrollada con ejemplos simples. Se analizan arcos de curvatura constante y los resultados obtenidos son comparados con varios autores.

## 1. Concepto corotacional

En este trabajo se presenta la información necesaria para el desarrollo de una formulación de elemento de viga corotacional 2D. El planteo de este trabajo sigue fuertemente el que se encuentra en [2] y [6], con una base general a partir de [1]. Con un análisis de elementos finitos de viga corotacional se permite a la estructura tener grandes desplazamientos y grandes giros, mientras que las deformaciones de los elementos de viga sean pequeños para que los resultados sea válidos. Se considera para este trabajo una relación constitutiva lineal elástica.

Para el desarrollo de un elemento corotacional es necesario las siguientes formulaciones: (i) el ángulo de rotación de una barra co-rotando, (ii) las relaciones entre las variables locales y globales y (iii) una matriz tangente variacional consistente. En las secciones siguientes se desarrollan todas estas formulaciones.

## 2. Formulación de elemento corotacional de Kirchhoff

### 2.1. Tensión y deformación axial

Se considera un elemento de viga típico en su configuración inicial y deformada, como se ve en la Figura 1. Para la viga en su configuración inicial se definen las coordenadas globales nodales como  $(X_1, Y_1)$  para el nodo 1 y  $(X_2, Y_2)$  para el nodo 2. El largo inicial de la viga es:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (1)$$

En la configuración deformada, considerando los versores globales de desplazamiento  $(u, w)$ , las coordenadas

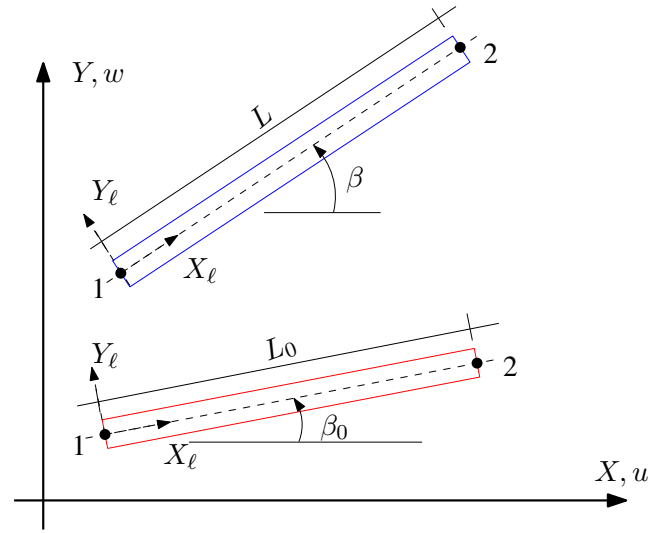


Figura 1: Configuración inicial y deformada de un elemento de viga, sin considerar deformación por flexión.

globales de los nodos son  $(X_1 + u_1, Y_1 + w_1)$  para el nodo 1 y  $(X_2 + u_2, Y_2 + w_2)$  para el nodo 2. El largo del elemento de viga deformado es:

$$L = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}, \quad (2)$$

donde:

$$\Delta X = (X_2 + u_2) - (X_1 + u_1), \quad (3)$$

$$\Delta Y = (Y_2 + w_2) - (Y_1 + w_1). \quad (4)$$

El desplazamiento axial local del elemento de viga es

$$u_\ell = L - L_0. \quad (5)$$

No obstante, si la diferencia entre  $L$  y  $L_0$  es muy pequeña, entonces (5) está mal condicionada para un uso numérico, por lo que [2] sugiere multiplicar  $u_\ell$  por  $(L + L_0)/(L + L_0)$ , lo cual da una fórmula mejor condicionada

$$u_\ell = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0}. \quad (6)$$

La deformación axial es considerada uniforme a lo largo del elemento y es calculada como  $\varepsilon_{x\ell} = u_\ell/L_0$ . La fuerza axial en la viga es entonces

$$N = \frac{EAu_\ell}{L_0}. \quad (7)$$

### 2.2. Ángulo de rotación

Las coordenadas globales se mantienen fijas en la formulación corotacional, mientras que las coordenadas corotacionales locales del elemento rotan con cada viga, como se ve en la Figura 1. El ángulo actual del elemento con

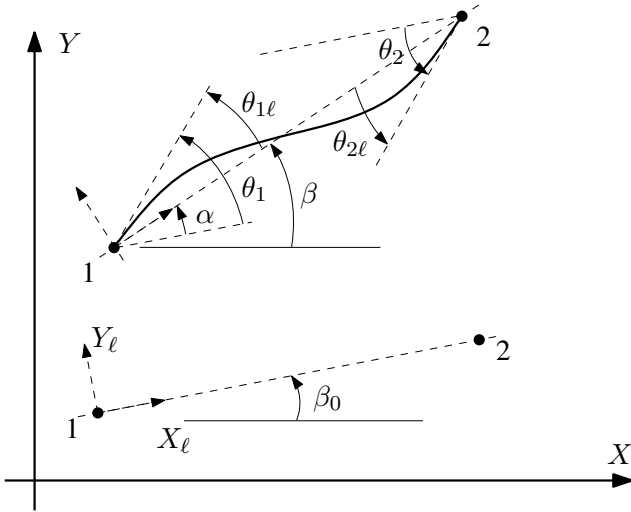


Figura 2: Configuración inicial y deformada de un elemento de viga debido a la deformación por flexión.

respecto a la coordenada global  $X$  es denotado como  $\beta$ . El coseno y seno de este ángulo se calcula como

$$\cos \beta = \frac{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)}{L}, \quad (8)$$

$$\sin \beta = \frac{(Y_2 + w_2) - (Y_1 + w_1)}{L}. \quad (9)$$

### 2.3. Tensión y deformación por flexión

Se considera la configuración inicial y deformada de la viga, como se ve en la Figura 2. Se denota el ángulo  $\beta_0$  como la pendiente inicial del elemento de viga y  $\alpha$  como la rotación rígida, respecto a las coordenadas globales. Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son las rotaciones nodales globales calculadas de la ecuación de rigidez global. Si los ángulos iniciales y finales de la barra,  $\beta_0$  y  $\beta$ , son conocidos, entonces los giros nodales locales son:

$$\theta_{1l} = \theta_1 + \beta_0 - \beta, \quad \theta_{2l} = \theta_2 + \beta_0 - \beta. \quad (10)$$

El ángulo inicial de la barra se calcula como

$$\beta_0 = \arctan \left( \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right). \quad (11)$$

De manera similar, el ángulo de la barra en la configuración deformada es

$$\beta = \arctan \left( \frac{Y_2 + w_2 - (Y_1 + w_1)}{X_2 + u_2 - (X_1 + u_1)} \right). \quad (12)$$

Las ecuaciones (10), (11) y (12) son válidas solamente para  $|\beta| < \pi/2$  según [3], debido al uso de la función  $\arctan$ . Utilizando la función  $\text{atan2}$  se permite extender el análisis hasta  $|\beta| < \pi$ . De todas maneras, para no tener la limitación del rango de la rotación de los elementos se sigue el enfoque desarrollado en [3], asumiendo que

las rotaciones son moderadas. Se opera con la ecuación (10) tal que

$$\sin \theta_{1l} = \sin(\theta_1 + \beta_0 - \beta) = \sin(\beta_1 - \beta) \quad (13)$$

$$= \cos \beta \sin \beta_1 - \sin \beta \cos \beta_1, \quad (14)$$

donde  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$ . Además,

$$\cos \theta_{1l} = \cos(\theta_1 + \beta_0 - \beta) = \cos(\beta_1 - \beta) \quad (15)$$

$$= \cos \beta \cos \beta_1 + \sin \beta \sin \beta_1. \quad (16)$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\theta_{1l} = \arctan \left( \frac{\cos \beta \sin \beta_1 - \sin \beta \cos \beta_1}{\cos \beta \cos \beta_1 + \sin \beta \sin \beta_1} \right). \quad (17)$$

Análogamente para la rotación local del nodo se obtiene que

$$\theta_{2l} = \arctan \left( \frac{\cos \beta \sin \beta_2 - \sin \beta \cos \beta_2}{\cos \beta \cos \beta_2 + \sin \beta \sin \beta_2} \right), \quad (18)$$

donde  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ . Mediante análisis estructural se puede mostrar que los momentos locales en los extremos de la viga se pueden relacionar con las rotaciones nodales locales de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1l} \\ \theta_{2l} \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

### 2.4. Vector de fuerzas internas

Se define el vector de fuerzas internas locales para el elemento  $i$  como

$$\mathbf{q}_{\ell i}^T = [ N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2 ] \quad (20)$$

Para el elemento  $i$  las solicitaciones  $\mathbf{q}_{\ell i}$  se obtienen de (7) y (19).

### 2.5. Desplazamientos y giros virtuales locales

Sea la configuración deformada indicada en la Figura 3, se considera un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{d}_{21}$ . Proyectando el desplazamiento virtual por un versor  $\mathbf{e}_1$  local por el eje de la barra se obtiene el desplazamiento virtual en la dirección axial en coordenadas locales del elemento:

$$\begin{aligned} \delta u_\ell &= \mathbf{e}_1^T \delta \mathbf{d}_{21} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix}^T \cdots \\ \cdots \delta \mathbf{d}_{21} &= \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta w_2 - \delta w_1 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

En lo que sigue se denota  $c = \cos \beta$  y  $s = \sin \beta$ . Por lo tanto, la ecuación (21) se escribe como:

$$\begin{aligned} \delta u_\ell &= c \delta u_2 - c \delta u_1 + s \delta w_2 - s \delta w_1 \\ &= -c \delta u_1 - s \delta w_1 + 0 \delta \theta_1 + c \delta u_2 + s \delta w_2 + 0 \delta \theta_2 \\ &= [ -c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0 ] \delta \mathbf{p} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (22)$$

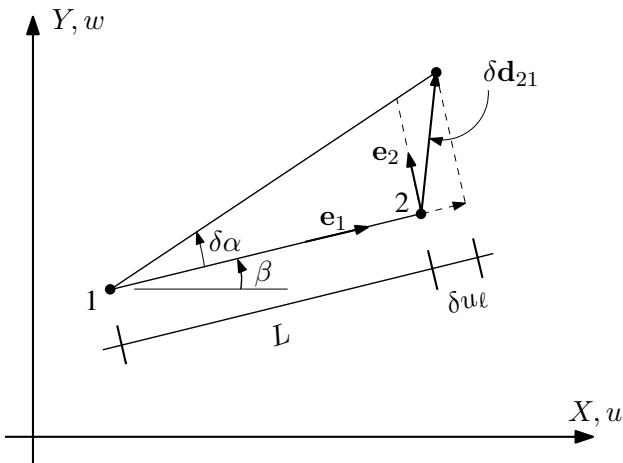


Figura 3: Pequeños desplazamientos virtuales en la configuración deformada.

donde  $\mathbf{p}^T = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2]$  es el vector de desplazamiento global y  $\delta \mathbf{p}$  es la variación. La ecuación (22) da la relación entre la deformación infinitesimal axial local y los desplazamientos infinitesimales nodales globales.

Para hallar la relación entre las rotaciones infinitesimales nodales locales y los desplazamientos nodales globales, se define el versor  $\mathbf{e}_2$  tal que  $\mathbf{e}_2^T = [-s \ c]$ . Luego, se impone una rotación rígida virtual en la configuración deformada (ver Figura 3) y se obtiene para un cambio de ángulo infinitesimal, un cambio en la longitud de arco  $L\delta\alpha = \mathbf{e}_2^T \delta \mathbf{d}_{21}$ , tal que

$$\delta\alpha = \frac{1}{L} \mathbf{e}_2^T \delta \mathbf{d}_{21}. \quad (23)$$

La ecuación (23) se puede escribir en función de los desplazamientos nodales,  $\mathbf{p}$ , como

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} -s \\ c \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta w_2 - \delta w_1 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{L} [s \ -c \ 0 \ -s \ c \ 0] \delta \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (24)$$

Se define el vector  $\mathbf{z}^T = [s \ -c \ 0 \ -s \ c \ 0]$ , por lo que la variación de  $\alpha$  es

$$\delta\alpha = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p}. \quad (25)$$

Para obtener  $\delta \theta_\ell$ , la variación de la ecuación (10) resulta en

$$\begin{aligned} \delta \theta_\ell &= \delta \begin{Bmatrix} \theta_1 + \beta_0 - \beta \\ \theta_2 + \beta_0 - \beta \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 + \delta \beta_0 - \delta \beta \\ \delta \theta_2 + \delta \beta_0 - \delta \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 - \delta \alpha \\ \delta \theta_2 - \delta \alpha \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde en el último paso se reconoce que  $\delta \beta_0 = 0$  y  $\delta \beta = \delta \alpha$ . Se sustituye (25) por  $\delta \alpha$  y se expande (26) para que

en función de  $\delta \mathbf{p}$

$$\delta \theta_\ell = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \right] \delta \mathbf{p} \quad (27)$$

Se define entonces a la matriz de giros  $\mathbf{A}^T$  tal que

$$\delta \theta_\ell = \mathbf{A}^T \delta \mathbf{p} \quad (28)$$

Utilizando el resultado de (22) y (28) se obtiene el vector completo que relaciona los desplazamientos y giros virtuales globales con los locales

$$\delta \mathbf{p}_\ell = \begin{Bmatrix} \delta u_\ell \\ \delta \theta_{1\ell} \\ \delta \theta_{2\ell} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{p} = \mathbf{B} \delta \mathbf{p}, \quad (29)$$

donde se define la matriz  $\mathbf{B}$  como

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

## 2.6. El trabajo virtual

El trabajo virtual interno es equivalente en coordenadas locales y globales. Por lo tanto,

$$\delta \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_i = N \delta u_{\ell v} + \bar{M}_1 \delta \theta_{1\ell v} + \bar{M}_2 \delta \theta_{2\ell v} = \delta \mathbf{p}_{\ell v}^T \mathbf{q}_{\ell i}, \quad (31)$$

y el subíndice  $v$  implica una cantidad virtual. Luego, utilizando (28) en (31) resulta

$$\delta \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_i = (\mathbf{B} \delta \mathbf{p}_v)^T \mathbf{q}_{\ell i} = \delta \mathbf{p}_v^T \mathbf{B}^T \mathbf{q}_{\ell i}. \quad (32)$$

Utilizando el principio fundamental de las variaciones, la ecuación (32) debe valer para cualquier desplazamiento virtual arbitrario  $\delta \mathbf{p}_v$ , por lo que

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{B}^T \mathbf{q}_{\ell i}. \quad (33)$$

Por lo tanto, una vez se conozcan las fuerzas internas locales en el elemento es directo el cálculo.

## 2.7. La matriz tangente de rigidez

Analizando una variación de (33) se llega a la matriz de rigidez tangente, que es

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_i &= \mathbf{B}^T \delta \mathbf{q}_{\ell i} + \delta \mathbf{B}^T \mathbf{q}_{\ell i} \\ &= \mathbf{B}^T \delta \mathbf{q}_{\ell i} + N \delta \mathbf{B}_1 + \bar{M}_1 \delta \mathbf{B}_2 + \bar{M}_2 \delta \mathbf{B}_3 \\ &= \mathbf{k}_{t1} \delta \mathbf{p} + \mathbf{k}_{t\sigma} \delta \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (34)$$

donde  $\mathbf{B}_i$  es la columna  $i$  de la matriz  $\mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{k}_{t1}$  es la matriz de rigidez material en coordenadas globales y  $\mathbf{k}_{t\sigma}$  es la matriz de rigidez geométrica. La matriz de rigidez tangente por lo tanto es

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_{t1} + \mathbf{k}_{t\sigma}. \quad (35)$$

A continuación se obtienen las dos matrices que componen la matriz tangente de rigidez. Tomando la variación de (20) se llega a que

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_{\ell i} &= \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta \bar{M}_1 \\ \delta \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix} \delta \mathbf{p}_\ell \\ &= \mathbf{C}_\ell \delta \mathbf{p}_\ell, \end{aligned} \quad (36)$$

donde  $r = \sqrt{I/A}$  es el radio de giro de la sección. Entonces, utilizando (36) en el primer término de (34) y el resultado de (29) se tiene

$$\mathbf{B}^T \delta \mathbf{q}_{\ell i} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \delta \mathbf{p}_\ell = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \mathbf{B} \delta \mathbf{p} = \mathbf{k}_{t1} \delta \mathbf{p}. \quad (37)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{k}_{t1} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \mathbf{B}, \quad (38)$$

que es la matriz de rigidez lineal para un elemento de pórtico 2D. Para encontrar la componente no lineal de la matriz de rigidez (la rigidez geométrica), se utilizan los últimos tres términos de (34). Tomando la variación de la primer columna de  $\mathbf{B}^T$  resulta en

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{B}_1 &= \delta \mathbf{r} = \delta \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T \delta \beta = \mathbf{z} \delta \beta. \end{aligned} \quad (39)$$

Analizando lo ilustrado en la Figura 3 se tiene que  $\delta \beta = \delta \alpha$  y utilizando (25) en (39) resulta

$$\delta \mathbf{B}_1 = \frac{1}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p}. \quad (40)$$

Tomando la variación de la segunda columna de  $\mathbf{B}^T$  resulta

$$\delta \mathbf{B}_2 = \delta \left( -\frac{1}{L} \mathbf{z} \right) = \delta \left( -\frac{1}{L} \right) \mathbf{z} + \left( -\frac{1}{L} \right) \delta \mathbf{z}. \quad (41)$$

Para hallar  $\delta \mathbf{z}$ , relacionan las ecuaciones (22), (24) y (25) para obtener

$$\delta \mathbf{z} = \delta \begin{Bmatrix} s \\ -c \\ 0 \\ -s \\ c \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c \\ s \\ 0 \\ -c \\ -s \\ 0 \end{Bmatrix} \delta \alpha = -\mathbf{r} \delta \alpha = -\frac{1}{L} \mathbf{r} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p}. \quad (42)$$

Para encontrar el primer término de (41), usando (22) y que  $L = L_0 + u_\ell$ ,

$$\begin{aligned} \delta \left( -\frac{1}{L} \right) &= (-1) \delta(L^{-1}) = (-1) (-L^{-2}) \delta u_\ell \\ &= \frac{\delta u_\ell}{L^2} = \frac{1}{L^2} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (43)$$

Ahora se sustituye (42) y (43) en (41) para obtener

$$\delta \mathbf{B}_2 = \frac{1}{L^2} \mathbf{z} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} + \frac{1}{L^2} \mathbf{r} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p} = \frac{1}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \delta \mathbf{p}. \quad (44)$$

Notar que  $\mathbf{r} \mathbf{z}^T$  y  $\mathbf{z} \mathbf{r}^T$  son productos tensoriales. Analizando  $\mathbf{B}^T$  resulta que  $\delta \mathbf{B}_3 = \delta \mathbf{B}_2$ . Por lo tanto, utilizando (40) y (44) en (34) se obtiene

$$\mathbf{k}_{t\sigma} = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T). \quad (45)$$

Combinando (38) y (45) se obtiene la matriz de rigidez tangente como

$$\mathbf{k}_T = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \mathbf{B} + \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T). \quad (46)$$

## 2.8. Estabilidad estructural

Se realiza un análisis lineal y no lineal de pandeo la estructura, realizando una linealización de la matriz tangente de rigidez, definida en (46). Para ello lo que se considera es quitar la dependencia de los términos de la matriz tangente del desplazamiento de los nodos de los elementos, por lo que los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{z}$  quedan definidos por la configuración indeformada de la estructura, mientras que las solicitaciones se consideran proporcionales a un factor  $\lambda$ .

Por lo tanto, la matriz de rigidez del material  $k b_{t1}$  sigue siendo la misma, y la matriz geométrica  $\mathbf{k}_{t\sigma}$  se linealiza, considerando una variación proporcional respecto al factor de carga  $\sigma = \lambda \bar{\sigma}$ , siendo  $\bar{\sigma}$  el estado tensional asociado a las fuerzas de referencia  $\mathbf{q}_{\text{ext}}$ . La matriz aproximada será:

$$\mathbf{k}_t \approx (\mathbf{k}_{t1} + \lambda \bar{\mathbf{k}}_\sigma), \quad (47)$$

donde  $\bar{\mathbf{k}}_\sigma$  queda de la siguiente manera:

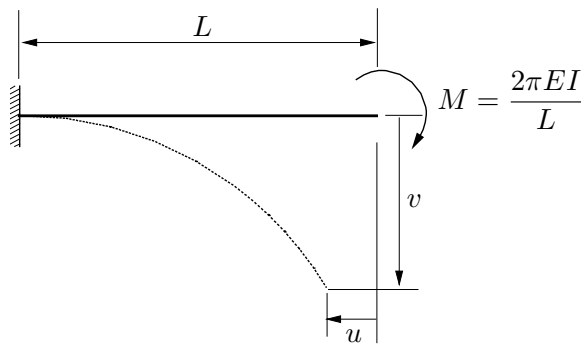
$$\bar{\mathbf{k}}_\sigma = \frac{1}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T. \quad (48)$$

Con la matriz de rigidez geométrica linealizada, los factores de carga críticos en el análisis lineal se obtienen resolviendo el siguiente problema de valores propios generalizado:

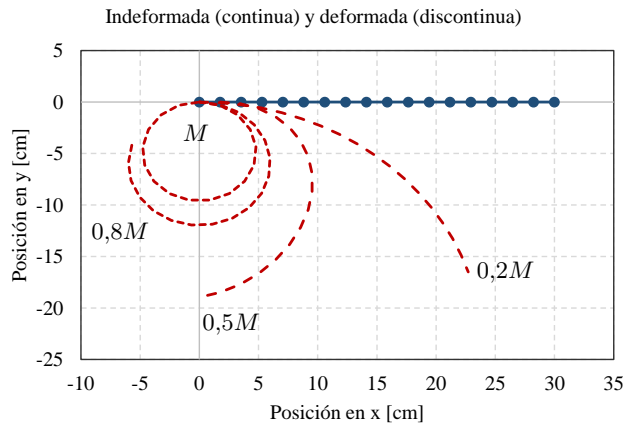
$$\mathbf{k}_t \mathbf{p} = -\lambda \bar{\mathbf{k}}_\sigma \mathbf{p}. \quad (49)$$

Para realizar un análisis no lineal de pandeo (NLBA), se calculan los valores y vectores propios de la matriz tangente de rigidez reducida planteada en (46) para cada paso de la iteración del método utilizado. Esta manera de análisis se basa en la explicada en [1].

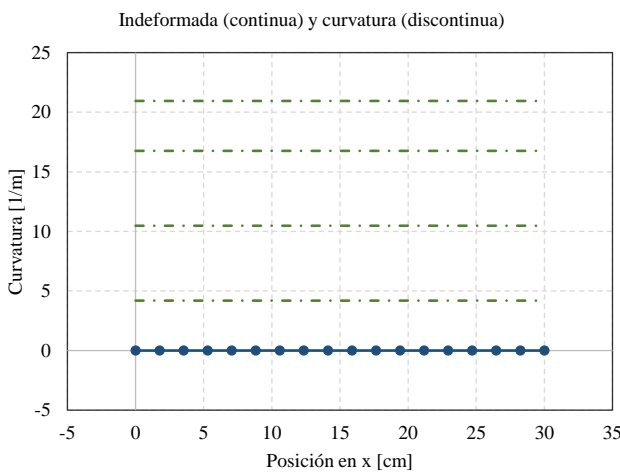
De esta manera, al tener un valor propio negativo en la matriz tangente de rigidez reducida se obtiene un punto de inestabilidad en la estructura.



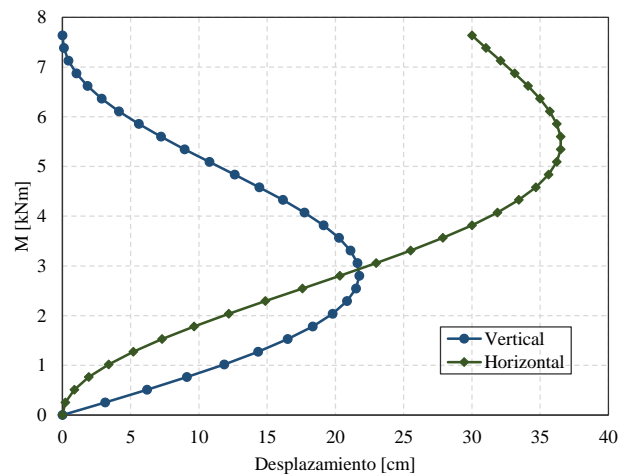
(a) Ménsula sometida a un momento puntual.



(b) Configuración deformada de la viga.



(c) Curvatura de la viga.



(d) Curva de carga-desplazamiento del nodo del extremo libre.

Figura 4: Resultados de viga en ménsula sometida a varios momentos, siendo  $M$  el momento de cierre indicado en la Figura 4a.

### 3. Ejemplos numéricos de validación

De manera de validar la herramienta implementada en ArchFEM y evaluar su precisión, algunos ejemplos fueron resueltos y las soluciones fueron comparadas con las obtenidas por otros autores.

Es válido aclarar que la mayoría de las referencias presentan sus resultados en forma gráfica, por lo que la comparación se realiza solamente de manera cualitativa.

Para la solución de los problemas no lineales se utiliza el método de Newton-Raphson completo o de Longitud de Arco (*Arc-Length*), actualizando la matriz tangente de rigidez en cada paso de la iteración. El desarrollo e implementación de estos métodos iterativos se realiza según lo indicado en [1]. En los problemas donde no hay saltos dinámicos (*Snap-Through* y *Snap-Back*) el método de Newton-Raphson suele funcionar adecuadamente, por lo que se utiliza éste ya que es más rápido que *Arc-Length*. Para el caso de análisis de pandeo y post pandeo en estructuras con saltos dinámicos se utiliza el método de *Arc-Length*.

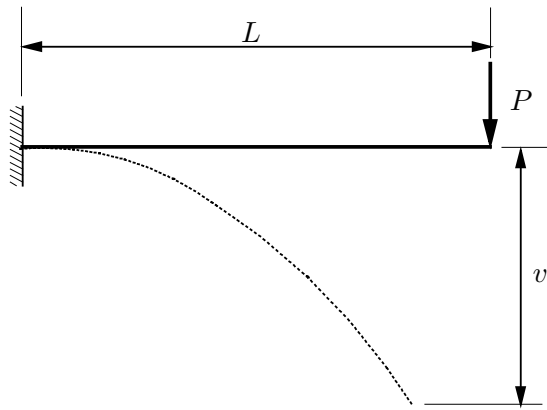
#### 3.1. Ménsula con momento en el extremo

El clásico problema de una viga en ménsula sometida a un momento puntual en su extremo libre es presentado en la 4a. Este problema es analizado por varios autores, como en [2,3,6]. Para este caso se sigue el ejemplo realizado por [6] y se comparan los resultados.

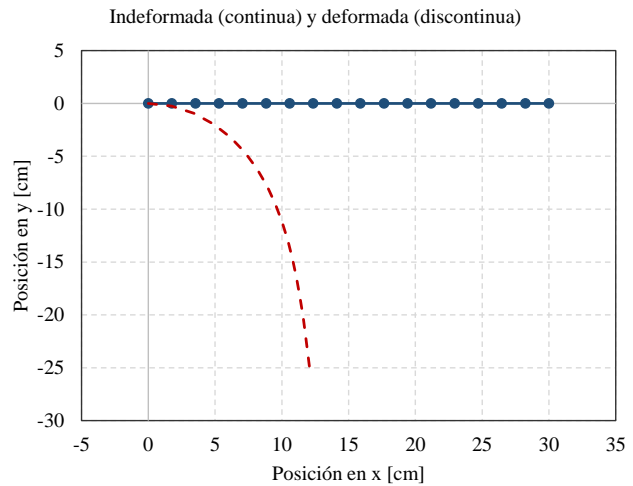
Para una viga elástica prismática, la solución exacta de la configuración deformada del problema es un círculo perfecto, ya que el momento, y por lo tanto la curvatura, es uniforme a lo largo de la viga. Este problema es útil para probar la formulación corotacional en dos dimensiones, ya que presenta rotaciones muy grandes.

Se considera una ménsula de  $L = 0,30\text{m}$  de largo, con una sección transversal cuadrada de  $5 \times 5\text{cm}$ , de un material con módulo de Young  $E = 0,7\text{GPa}$  (equivalente a 100ksi). La viga es modelada con 17 elementos y el problema se resuelve con el método de Newton-Raphson, utilizando una tolerancia del desplazamiento de  $10^{-3}$ .

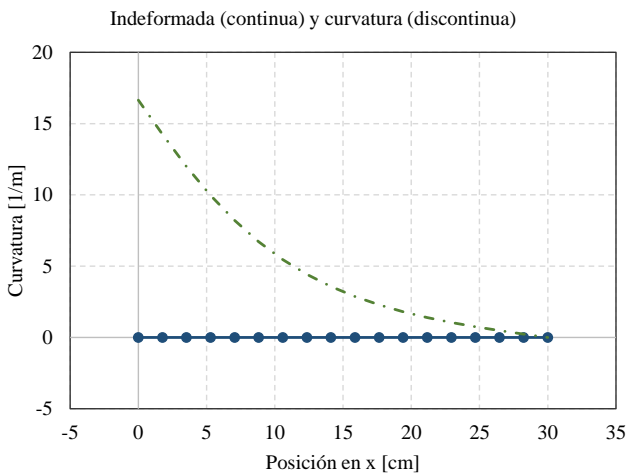
Se puede ver que para el desplazamiento vertical del extremo, el comportamiento es lineal hasta un poco me-



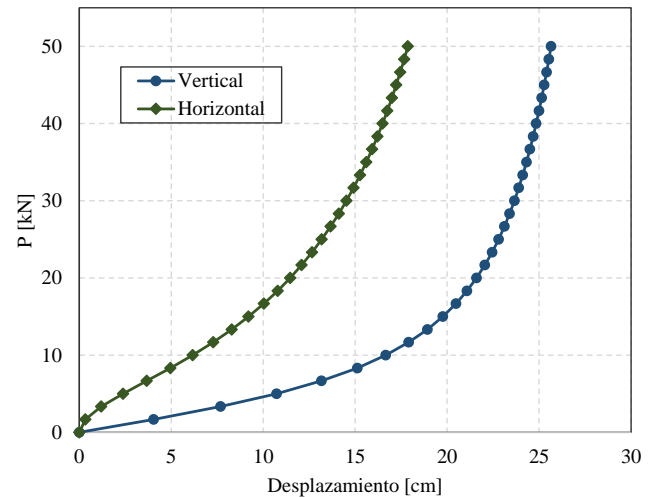
(a) Configuración deformada de la viga.



(b) Configuración deformada de la viga.



(c) Curvatura de la viga.



(d) Curva de carga-desplazamiento del nodo del extremo libre.

Figura 5: Resultados de viga en ménsula sometida la carga puntual  $P$  según lo indicado en la 5a.

nos de  $0,2M$  y luego pasa a ser claramente no lineal, hasta volver a ser cero cuando se alcanza el valor de  $M$  indicado en la Figura 4a. Se comprueba además que la curvatura es uniforme para todos los valores de momento analizado, además de que se logra tener una geometría deformada de cierre para el valor de momento  $M$ .

### 3.2. Ménsula con carga vertical en el extremo

Otro clásico problema de una viga en ménsula es la sometida a una carga vertical puntual en su extremo libre, presentado en la Figura 5a. Este problema también es analizado por [2, 3, 6]. Para este caso se sigue el ejemplo realizado por [6] y se comparan los resultados.

Este problema es muy interesante para un análisis no lineal en grandes desplazamientos, ya que se tiene un desplazamiento vertical alrededor de un 80% del largo total de la ménsula, como se ve en la Figura 5b.

La ménsula y el análisis realizado es el mismo que en el problema presentado en la Subsección 3.1. La carga

aplicada es  $P = 50\text{kN}$ .

Se puede ver como el comportamiento lineal en la relación entre el desplazamiento vertical y la carga aplicada sucede hasta aproximadamente  $P = 5\text{kN}$ . Se comprueba que el desplazamiento vertical para  $P = 50\text{kN}$  es el mismo que en el ejemplo resuelto por [6]. Se aprecia también como la curvatura a lo largo de la ménsula tiene el comportamiento esperado para un momento que varía de forma lineal.

### 3.3. Ménsula con imperfección

Otro problema interesante para un análisis no lineal en grandes desplazamientos es de la ménsula con una carga de compresión axial  $P$  y una imperfección aplicada en su geometría inicial. Se resuelve el mismo ejemplo realizado en [1].

En este caso se considera una ménsula formada por un perfil PNI 10 de 5 metros de largo sometido a una carga puntual de compresión en el extremo libre. En este caso

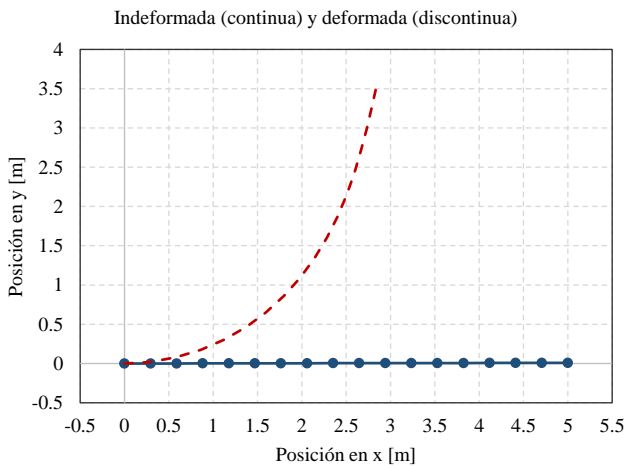


se tiene una carga crítica de Euler dada por

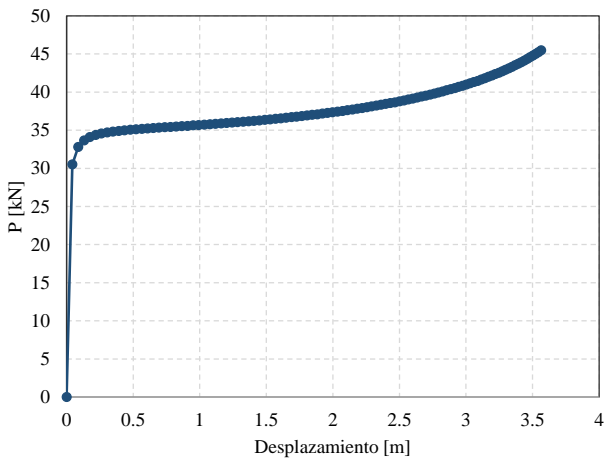
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\text{viga}}}{(2L_{\text{viga}})^2} \approx 35,4\text{kN}, \tag{50}$$

la cual define el estado de carga de referencia. En este ejemplo se aplica la imperfección manualmente, colocando un giro de  $0.1^\circ$  respecto al eje horizontal a toda la ménsula.

Se puede ver como el desplazamiento vertical del extremo libre es de aproximadamente un 70 % del largo total de la viga, lo cual lo hace un ejemplo simple e importante para análisis en grandes desplazamientos. Así mismo, se observa como cualitativamente el resultado obtenido entre la carga y el desplazamiento ilustrado en la Figura 6b es el mismo al presentado en [1], además de que el inicio del comportamiento no lineal y de aumento grande de los desplazamientos sin aumentar la carga se da luego de superar el valor  $P_{cr}$  calculado en la ecuación (50). El valor obtenido con ArchFEM de carga crítica de pandeo lineal es el mismo que el indicado en (50).



(a) Configuración deformada de la viga.



(b) Curva de carga-desplazamiento del nodo del extremo libre.

Figura 6: Resultados de viga en ménsula sometida a una carga de compresión axial con una imperfección geométrica.

### 3.4. Toggle Frame de Williams

Williams [4] resolvió analíticamente y experimentalmente el pórtico ilustrado en la Figura 7 (con diferentes secciones transversales). La solución analítica consideraba aproximadamente grandes deformaciones, la influencia de las fuerzas axiales en la rigidez a flexión y el acortamiento axial debido a la flexión.

El pórtico de ejemplo desarrollado por [4] es similar a la cercha de Von Mises analizada en [1] solo que para elementos finitos de viga. Consiste de dos vigas empotradas y con continuidad en su unión, como se presenta en la Figura 7, sometidas a una carga vertical  $P$ . Los resultados son presentados en la Figura 8.

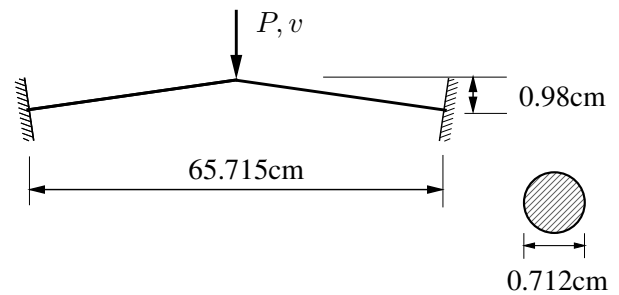
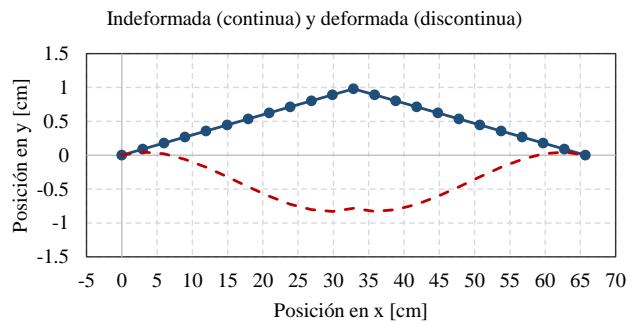
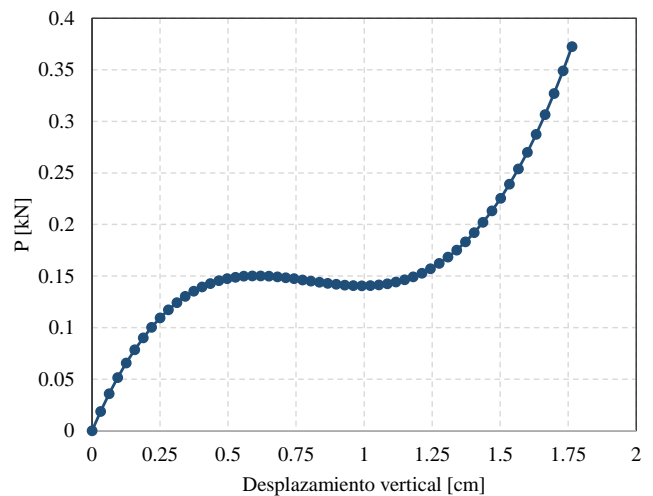


Figura 7: Geometría del Toggle Frame de Williams.



(a) Configuración deformada del pórtico.



(b) Curva de carga-desplazamiento del nodo central.

Figura 8: Resultados de Toggle Frame de Williams.

Los resultados obtenidos están de acuerdo con lo pre-

sentado en [3, 4, 6]. A diferencia de la cercha de Von Mises presentada en [1], en este caso no existe un punto de equilibrio para  $P = 0\text{kN}$  que no sea el de desplazamiento nulo.

### 4. Análisis de arcos de curvatura constante

#### 4.1. Arco circular llano

En la Figura 9 se presenta el arco de curvatura constante a analizar, el cual es estudiado por [5]. El arco está formado por una viga de sección transversal cuadrada de  $2.54 \times 2.54\text{cm}$ , con un módulo de elasticidad de Young de  $68.95\text{GPa}$  (equivalente a  $10000\text{ksi}$ ). El radio de curvatura del arco es  $R = 2,54\text{m}$  y se estudia el mismo arco para radios de curvatura de  $2R, 3R$  y  $4R$ .

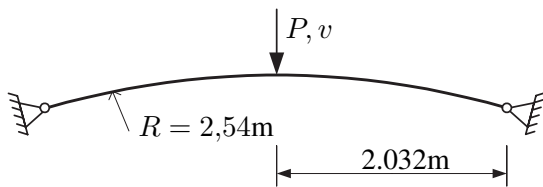
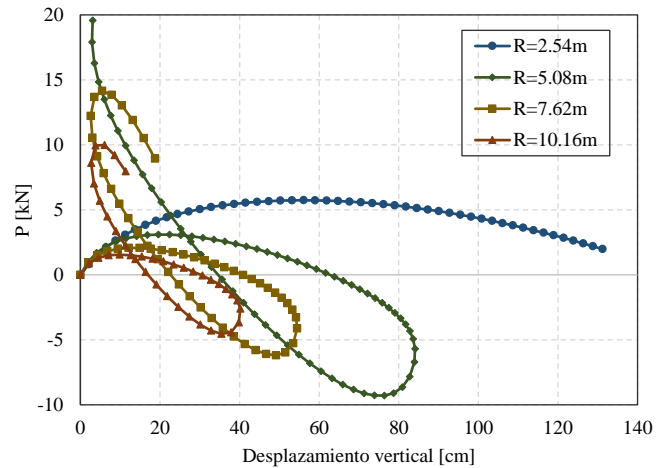
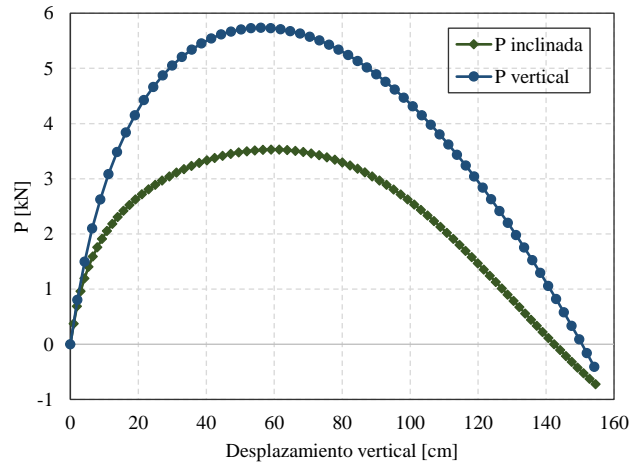


Figura 9: Geometría de arco circular llano.



(a) Curva de carga desplazamiento del nodo central, para varios radios de curvatura y carga  $P$  vertical.



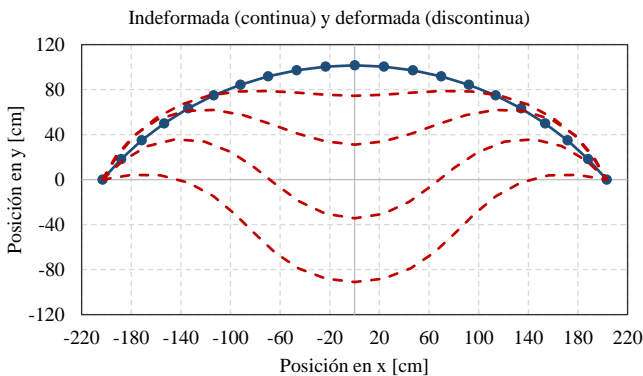
(b) Curva de carga-desplazamiento del nodo central, para  $R = 2,54\text{m}$  y carga  $P$  inclinada  $45^\circ$ .

Figura 11: Resultados del arco presentado en la Figura 9.

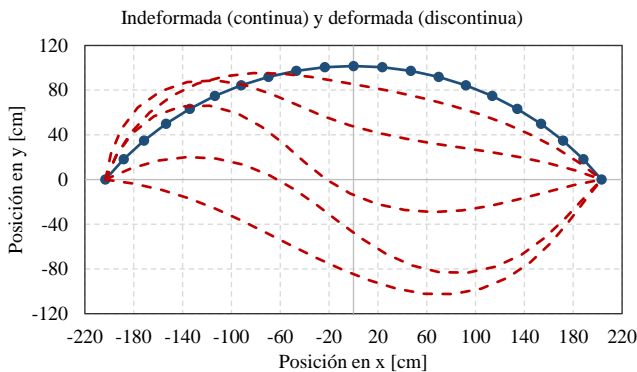
El arco está sometido a una carga vertical puntal  $P$ , la estructura es discretizada en 20 elementos y se considera una tolerancia en el desplazamiento de  $10^{-5}$ . Se utiliza el método de *Arc-Length* para resolver el problema no lineal, debido a la presencia de uno o varios puntos en donde la matriz tangente no es definida positiva y el método de Newton-Raphson no da resultados aceptables.

En la Figura 10a se presenta la estructura deformada del arco con curvatura  $R = 2,54\text{m}$  para valores de  $P$  hasta alcanzar un valor máximo de aproximadamente  $5.80\text{kN}$ . En la Figura 10b se presenta el mismo arco sometido a la misma carga  $P$  pero ésta inclinada  $45$  grados respecto al eje horizontal (según vector  $(1, 1)$ ). En las Figuras 11a y 11b se presentan las curvas de carga-desplazamiento para cada caso, analizando para varios radios de curvatura para el primer caso analizado.

Se observa que los resultados obtenidos son los mismos que los presentados en [5]. Se puede apreciar como al aumentar el radio de curvatura del arco la carga admisible por la estructura antes del punto de pendiente nula donde se suele dar un salto dinámico disminuye. Es interesan-



(a) Configuración deformada del arco, para  $R = 2,54\text{m}$  y carga  $P$  vertical.



(b) Configuración deformada del arco, para  $R = 2,54\text{m}$  y carga  $P$  inclinada  $45^\circ$ .

Figura 10: Resultados del arco presentado en la Figura 9.



te notar como en el arco se da un efecto de *snap-back* donde el salto dinámico resulta en una disminución del desplazamiento, a diferencia de *Toggle Frame* analizado anteriormente.

Para el caso de carga  $P$  inclinada se puede ver como la relación carga-desplazamiento es similar, pero la carga máxima admisible por la estructura antes del pandeo es aproximadamente un 40% menor al caso de  $P$  vertical. En la **Figura 12** se presenta la curva de carga-desplazamiento en donde se le ha agregado a todos los elementos una imperfección de  $0.1^\circ$ . Así como se muestra en [1], se puede ver como debido a la imperfección la carga crítica de pandeo se reduce un 35%, lo cual es un valor muy grande para una imperfección tan pequeña.

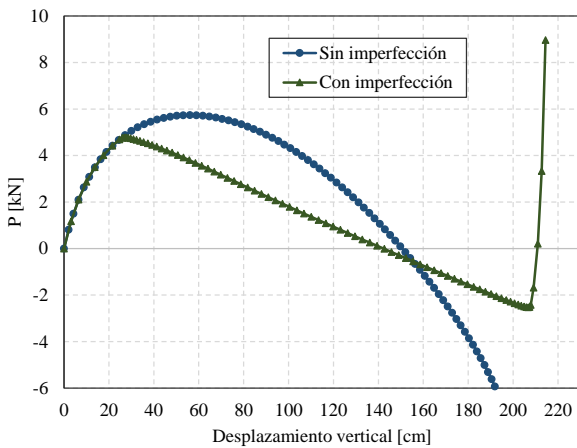


Figura 12: Curva de carga-desplazamiento del nodo central con imperfección.

### 4.2. Arco circular profundo

En la **Figura 13** se presenta un arco profundo (con un ángulo interior mayor a  $180^\circ$ ), cómo lo plantea [5]. Las propiedades geométricas y del material del arco son las mismas que la del ejemplo anterior.

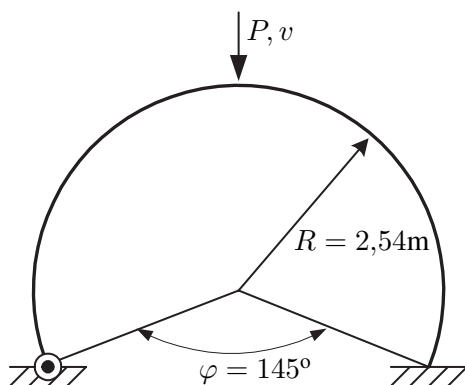
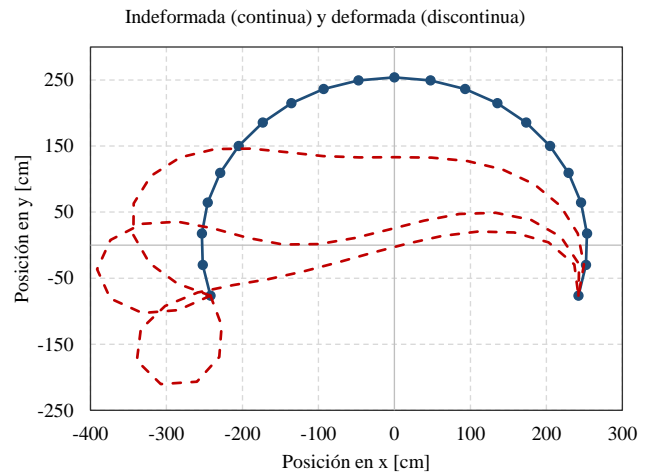
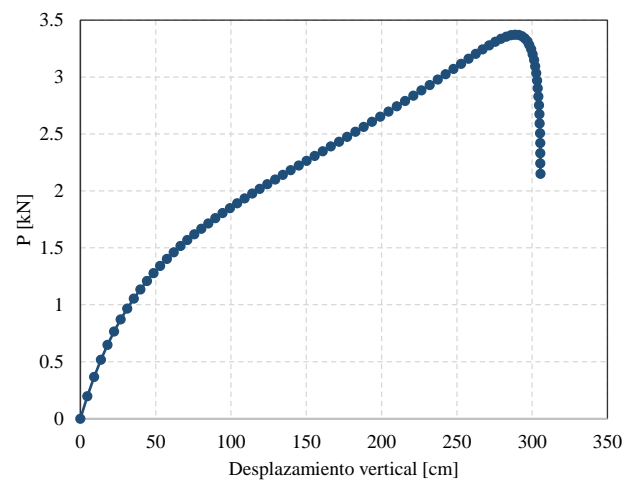


Figura 13: Geometría de arco circular profundo.

El arco está sometido a una carga puntual vertical  $P$  en el nodo central y está articulado en un extremo y empotrado en otro, por lo que el arco tiene una configuración



(a) Configuración deformada de la viga.



(b) Curva de carga-desplazamiento del nodo del extremo libre.

Figura 14: Resultados de viga en ménsula sometida a una carga de compresión axial con una imperfección geométrica.

axisimétrica respecto de su eje. En la **Figura 14** se presentan los resultados obtenidos de desplazamientos para varios valores de  $P$  y la curva de carga-desplazamiento.

Es interesante analizar que en este caso de arco axisimétrico, donde tiene un apoyo impedido al giro, luego de un valor de carga  $P = 1,10\text{kN}$  se da una relajación que tiene un comportamiento lineal hasta llegar al punto de pérdida de rigidez para  $P = 3,40\text{kN}$ . Se podría simplificar la curva de carga-desplazamiento por una función bilineal hasta ese punto. Los resultados obtenidos son los mismos que los presentados en [5].

## 5. Conclusiones

Se ha podido implementar una formulación de elementos finitos corotacionales de vigas para el análisis de arcos. Para obtener resultados del análisis no lineal de pandeo y post-pandeo se resolvió con métodos numéricos iterativos como Newton-Raphson y *Arc Length*. Se ha vali-

dato ArchFEM con ejemplos simples de vigas y arcos, comparando los resultados con varias bibliografías. El elemento corotacional de viga es muy útil para analizar en grandes desplazamientos y giros este tipo de estructuras.

## Referencias

- [1] Juan Bruno Bazzano and Jorge Pérez Zerpa. *Introducción al análisis no lineal de estructuras*. Universidad de la República, Montevideo, 1st edition, 2017.
- [2] René de. Borst and M. A. Crisfield. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. Wiley, 2012.
- [3] Remo Magalhães de Souza. *Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames*. Phd thesis, UC Berkeley, 2000.
- [4] F. W. Williams. An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 17(4):451–469, nov 1964.
- [5] R.D. Wood and O.C. Zienkiewicz. Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. *Computers & Structures*, 7:725–735, 1976.
- [6] Louie L. Yaw. 2D Corotational Beam Formulation. Technical report, Walla Walla University, 2009.