

Implementación no lineal de modelo co-rotacional de vigas 3D con el método de elementos finitos

Mauricio Vanzulli

mvanzulli@fing.edu.uy

Resumen:

El propósito de este trabajo es presentar un modelo no lineal corrotacional de vigas flexibles 3D. La novedad de este artículo se relaciona con la obtención matemática detallada de la matriz tangente y el vector de fuerzas internas para un marco corrotacional. Consecuentemente, interpolaciones cúbicas se utilizan para los desplazamientos y ángulos dentro del elemento (Polinomios de Hermitte). Para mejorar la eficiencia del programa se modifica la matriz tangente. Además se somete el modelo a Tres escenarios distintos donde se puede concluir un comportamiento adecuado respecto a las soluciones analíticas, las propuestas en [2]

1. Introducción

Vigas flexibles se utilizan en variados campos de la ingeniería, entre otras: aeronaves, turbinas propulsoras, molinos eólicos marítimos y terrestres. Su comportamiento no lineal es usualmente modelado utilizando no linealidad geométrica para grandes desplazamientos, la cual es representada por el modelo corrotacional. Muchos autores han contribuido al modelo corrotacional en las últimas décadas, entre ellos se destacan Rankin y Nour Omid [7] y [6] sentaron las bases del método que fue desarrollado .

Este trabajo se basa en el estudio de análisis no lineal de estructuras, considerando únicamente efectos de no linealidad geométrica. La formulación corrotacional se basa principalmente en la descomposición del movimiento en dos partes, una componente rígida y otra deformable. Para la componente rígida se considera un sistema de coordenadas solidario que permite ubicar al elemento en el espacio. Por otra parte para la componente deformable se considera una formulación (en este caso lineal) para la deformación. La principal ventaja del modelo corrotacional es la versatilidad ante diferentes formulaciones locales. Permitiendo incorporar distintos tipos de elementos, de manera sencilla. Para este trabajo se utilizó elementos de viga 3D según la referencia [2], considerando grandes

desplazamientos y giros para materiales isótropos e hiperelásticos que cumplen la una relación lineal esfuerzo-deformación.

Este documento consta de dos partes, primeramente se presentan de manera resumida un modelo co-rotacional en la Sección 2 y luego se procede a resolver tres aplicaciones numéricas en la Sección 3. Se resolvieron tres escenarios, el primero consiste en una viga empotrada con un momento en el extremo opuesto. Este problema se presenta en la Sección 3.1 y tiene solución analítica, esto permitió validar los resultados para diferentes números de elementos. El escenario de la viga a compresión, busca modelar casos de inestabilidad elástica. Se halló la curva carga desplazamiento para diferentes valores de imperfecciones en la Sección 3.2. Por último en la Sección 3.4 se modeló una viga doblemente apoyada con cargas distribuidas, se hallaron las deformadas y la curva carga desplazamiento. Finalmente en la Sección 4 se concluye que el modelo reproduce de manera satisfactoria los resultados para los tres ejemplos, el primero de ellos es cotejado con la solución analítica.

2. Fundamentos teóricos

En esta sección se exponen los conocimientos esenciales para la comprensión del método utilizado en este trabajo. Primeramente en la Sección 2.1 se introducen conceptos generales respecto a los parámetros y variables principales para caracterizar a rotaciones en el espacio. Luego se presentan la formulación cinemática corrotacional en la Sección 2.2. Una vez desarrollados las componentes cinemáticas se calculan el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangente en la Sección 2.3.

2.1. Parametrización de rotaciones

Para la comprensión cinemática propuesta en [2] se consideran una composición de rotaciones, por este motivo se explica a continuación los parámetros relevantes en transformaciones lineales de este tipo. Considérese el vector \mathbf{x}_0 perteneciente a R^3 y el rotado de este \mathbf{x} por la transformación R , estas variables se relacionan según la Ecuación (1).

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

La matriz R es ortonormal, una propiedad inherente a estas transformaciones permite caracterizarlas mediante el ángulo de giro del vector director de la rotación ($\theta = \theta \mathbf{n}$). Las relaciones espaciales entre las variables se ilustran en la Figura 1.

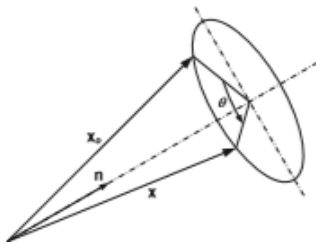


Figura 1: Esquema de rotación espacial.

La matriz de rotación R se puede expresar en función de la norma del ángulo de giro θ y la matriz antisimétrica de incrementos $\hat{\theta}$. la Ecuación (2) expresa la lienalización de la matriz R del párrafo anterior. Esta ecuación es similar al desarrollo de Taylor aplicado a una función exponencial, por ende se utiliza este recurso para simplificar

la nomenclatura.

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \hat{\theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \hat{\theta}^2 = \exp(\hat{\theta}) \rightarrow \hat{\theta} = \log(\mathbf{R}) \quad (2)$$

A continuación se procede con un cálculo de variaciones, estas tendrán importancias para hallar expresiones de magnitudes como: fuerzas internas y matrices tangentes entre otras. Llamando $\delta \hat{\mathbf{w}}$ al incremento infinitesimal del ángulo espacial impuesto por la rotación de un incremento en el ángulo material $\delta \theta$, se define la matriz \mathbf{T} que permite vincularlos según la Ecuación (3).

$$\mathbf{T}_s^{-1} = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \hat{\theta} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \hat{\theta}^2 \rightarrow \delta \theta = \mathbf{T}_s^{-1} \delta \mathbf{w} \quad (3)$$

Esta matriz es de vital importancia en desarrollos que se analizarán más adelante porque permite establecer relaciones entre incrementos al cambiar de coordenadas.

2.2. Cinemática co-rotacional

El planteo corrotacional para elementos de viga 3D binodales, consiste en la composición de un movimiento rígido, que permite grandes rotaciones y desplazamientos, superpuesto con un movimiento de sólido deformable. Para la comprensión de este análisis deben de comprenderse una serie de rotaciones consecutivas ilustradas en las Figuras 2,3 y 4. En la Figura 2 se muestra la asignación del elemento de la configuración referencia a la configuración indeformada. En la Figura 3 se ilustran las transformaciones que permiten ubicar al elemento desde la configuración de referencia a la configuración deformada. Por último en la figura 4 se muestran gráficamente las transformaciones que permiten encontrar al elemento deformado, a partir de la configuración indeformada.

Primeramente se define un sistema global de referencia definidos por la base ortogonal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Junto con el elemento se elige un sistema de referencia que se traslade y gire solidariamente, denotado por la base $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$. Para ubicar el elemento en la configuración indeformada y deformada se establece las siguientes ternas respectivamente: $(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0)$ y $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{t}_3^i)$. Se hace énfasis que la configuración indeformada basta con un sistema de referencia único para ambos nodos, por el contrario, la configuración deformada debido a la flexibilidad requiere dos sistemas, denotados con la letra \mathbf{t} donde el supra-índice i

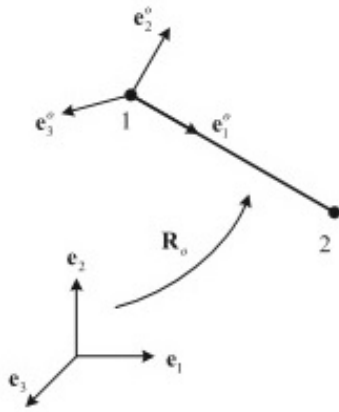


Figura 2: Rotación rígida.

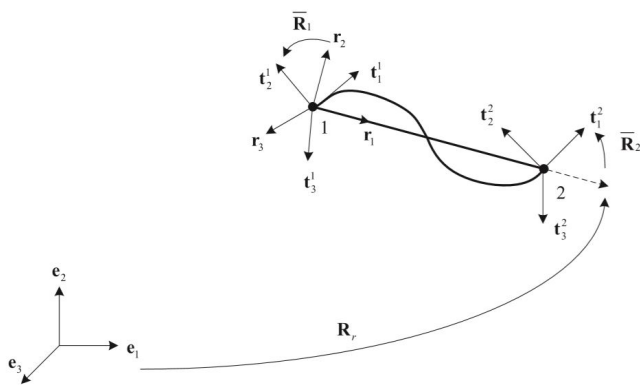


Figura 3: Rotación R_r .

hace referencia al nodo 1 y 2 del elemento.

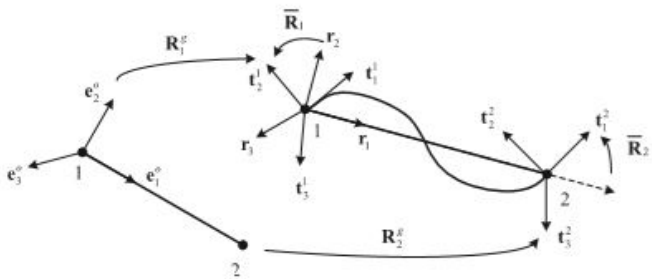


Figura 4: Rotación deformable.

En función de las ternas $\mathbf{e}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_i$ se buscan las transformaciones que permitan vincularlas. En primera medida se define la matriz \mathbf{R}_r (ver Figura 3) que vincula vectores de la configuración indeformada (material) y deformada. Esta matriz se calcula como la transformada de los vectores $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ como columnas, estos son $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$. Sin embargo la transformación \mathbf{R}_r no tiene en cuenta los giros locales, para considerar estos ángulos se utiliza $\bar{\mathbf{R}}_i$. Esta rotación toma vectores en la condición deformada y aplica los giros relativos correspondientes a los grados de

libertad del nodo.

Otra forma de obtener los vectores \mathbf{t}_i deformados, consiste en aplicar a \mathbf{e}_i^0 la transformación \mathbf{R}_i^g . Donde el subíndice g representa que esta matriz depende de coordenadas globales. A partir de las definiciones establecidas en los párrafos anteriores y utilizando la propiedad para matrices orto-normales de la Ecuación (4) es posible vincular las transformaciones según las Ecuaciones (5) y (6):

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \tag{4}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_r^T \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_o \tag{5}$$

$$\mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_o = \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{R}}_i \tag{6}$$

Los grados de libertad asociados al elemento son: los desplazamiento nodales \mathbf{u}_i^g y los ángulos \mathbf{w}_i^g en coordenadas globales respectivamente. Para las coordenadas locales se reducen los grados de libertad a siete, se sustituyen los desplazamientos nodales por el elongamiento de la barra axial y los ángulos se transforman a coordenadas locales. El grado de libertad del desplazamiento axial u se asocia con las diferencias de la longitud de la viga en la configuración deformada (l_n) y de referencia (l_o), este se utilizará para calcular según [3].

$$u = l_n - l_o \tag{7}$$

La transformación material rígida \mathbf{R}_r , que define la orientación de los ejes locales de referencia, la Ecuación (8)

$$\mathbf{R}_r = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] \tag{8}$$

Llamando \mathbf{X}_i a la posición del nodo i , la primer coordenada axial del sistema local (\mathbf{r}_1), cuyo sentido va desde el nodo uno al dos, queda determinada según la Ecuación (9).

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1^g - \mathbf{u}_1^g}{\|\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1^g - \mathbf{u}_1^g\|} \quad l_n = \|\mathbf{x}_2^g + \mathbf{u}_2^g - \mathbf{x}_1^g - \mathbf{u}_1^g\| \tag{9}$$

Los versores resultantes de la base se deben calcular con la ayuda de un vector auxiliar \mathbf{p} . Este vector se define en la Ecuación (10) de forma tal que su anti-transformado por la rotación \mathbf{R}_i^g coincide con \mathbf{e}_2^0 . A partir de este versor se pueden calcular los restantes vectores de la base, esto se expresa en las Ecuaciones (11) y (12).

$$\mathbf{p}_i = (\mathbf{R}_i^g)^{-1} \mathbf{e}_2^0 \quad (10)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i^g \mathbf{R}_0 [0, 1, 0]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}\|} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 \quad (12)$$

Utilizando la notación $\bar{\theta}$ y \bar{u} para los desplazamientos locales, las variaciones de los desplazamiento globales se denota con la letra $\delta \mathbf{d}_g$ y las locales en función de ángulos en coordenadas espaciales $\delta \mathbf{d}_l$. Se traduce entonces en las Ecuaciones (13) y (14).

$$\delta \mathbf{d}_l = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T] \quad (13)$$

$$\delta \mathbf{d}_g = [\delta \mathbf{u}_1^g, \delta \mathbf{u}_2^g, \delta \bar{\theta}_1^T, \delta \bar{\theta}_2^T] \quad (14)$$

2.3. Vector de fuerzas internas y matriz tangente

En esta sección se presentan brevemente las variables más relevantes y un desarrollo escueto para la obtención del vector de fuerzas internas y la matriz tangente.

Utilizando las variables cinemáticas definidas en las Ecuaciones (2) y (5) en combinación con los desplazamiento locales se obtienen primeramente los vectores de fuerza y luego la matriz tangente para coordenadas locales. A continuación se vinculan las variables de desplazamiento y fuerzas globales en función de las locales. Para esto se define la matriz \mathbf{B} , esto se expresa en la Ecuación (15).

$$\delta \mathbf{d}_l = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}_g \quad \mathbf{f}_l = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_g \quad (15)$$

El cambio de variables debe realizarse en dos etapas, esto se debe a que $\delta \hat{\theta}$ en la Ecuación (13) es la variación angular del vector de rotación respecto a la transformación $\bar{\mathbf{R}}_i$, lo que se evidencia aplicando La Ecuación (2): $\bar{\theta}_i = \log(\bar{\mathbf{R}}_i)$. No obstante, los ángulos diferenciales locales $\delta \bar{\mathbf{w}}_i$ se corresponde con las rotaciones espaciales asociadas \mathbf{R}_r . Se define consecuentemente los incrementos de desplazamientos locales:

$$\delta \mathbf{d}_a = [\delta \bar{u}, \delta \bar{\mathbf{w}}_1^T, \delta \bar{\mathbf{w}}_2^T] \quad (16)$$

Definiendo la matriz $G = \frac{\partial \theta_i^e}{\partial \mathbf{d}^e}$ donde el vector θ_r^e representa los desplazamientos angulares en coordenadas espa-

ciales del elemento y \mathbf{d}^e los desplazamientos del elemento en coordenadas globales. Operando se obtiene:

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{1} : \mathbf{5}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta/l_n & \eta_{12}/2 & -\eta_{11}/2 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{6} : \mathbf{11}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta/l_n & \eta_{22}/2 & -\eta_{21}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/l_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Los parámetros η se calculan realizando los cocientes entre las componentes de los vectores \mathbf{p} y \mathbf{p}_i de las Ecuaciones presentadas en (11). Además definiendo \mathbf{E} como se muestra en la Ecuación (19), quedan vinculados los diferenciales de desplazamientos globales a través de la matriz de giro \mathbf{R}_r :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{d}_g^e = \mathbf{E}^T \mathbf{d}_g^e \quad (19)$$

La relación entre los diferenciales del vector de desplazamiento definido en la Ecuación (16) y los ángulos $\delta \bar{\mathbf{w}}$ se puede obtener utilizando las Ecuaciones (17), (18) y (19).

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{w}}_1 \\ \delta \bar{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g = \mathbf{P} \mathbf{E}^T \delta \mathbf{d}_g \quad (20)$$

El primer cambio de coordenadas se realiza utilizando la Ecuación (3), este permite expresar los grados de libertad locales relativos en función de desplazamientos considerando ángulos globales ($\delta \mathbf{d}_l \rightarrow \delta \mathbf{d}_a$). Consecutivamente utilizando las Ecuaciones (20) y (7) periten llevar acabo un segundo cambio de variables llevando los desplazamientos $\delta \mathbf{d}_a$ a $\delta \mathbf{d}_g$.

Aplicando la metodología descrita en el párrafo anterior y definiendo variables auxiliares se obtiene la expresión para la matriz tangente en coordenadas globales:

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{B}_a^T \mathbf{k}_a \mathbf{B}_a + \mathbf{D} \mathbf{f}_{a1} - \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{G} \mathbf{a}_r \quad (21)$$

Se destaca que la matriz no es simétrica, sin embargo según [7] esta puede ser simetrizada con el objetivo de no perder la convergencia cuadrática, al menos que momentos externos nodales sean aplicados. Para el código se simetrizó la matriz tangente, esto conlleva a un número mayor de iteraciones en converger para un determinado nivel de carga. Sin embargo, debido a la exactitud de la función de fuerza interna obliga al método de N-R a converger [7].

En la Ecuación (21) la matriz \mathbf{B}_a permite realizar el cambio de coordenadas $\delta \mathbf{d}_a$ a $\delta \mathbf{d}_g$, la variable \mathbf{k}_a se corresponde con el aporte de rigidez local girado por la rotación $\hat{\mathbf{R}}_i$. Por otra parte, la matriz \mathbf{D} es anti-simétrica y se calcula en función de los productos internos de los vectores de la base \mathbf{e}_i , además $fa1$ se corresponde con la magnitud de la fuerza axial de la barra.

En la Ecuación (21) la matriz \mathbf{Q} se halla a partir del producto de \mathbf{P} y los momentos nodales respecto de las coordenadas globales, de manera similar los valores de η se calculan en función de los momentos y la longitud deformada l_n .

Análogamente el vector de fuerzas internas y sus variaciones se pueden obtener en función de las siguientes variables, se introduce el vector \mathbf{m} que contiene los momentos nodales del elemento en orden (e_1, e_2, e_3) :

$$\mathbf{F}^g = \mathbf{B}_a^T \mathbf{f}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{PE}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_a \quad (22)$$

$$\delta \mathbf{F}^g = \mathbf{B}_a^T \delta \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{r}^T \mathbf{f}_{a1} + \delta (\mathbf{EP}^T) \mathbf{m} \quad (23)$$

$$\mathbf{m} = [fa2 \ fa3 \ fa4 \ fa5 \ fa6 \ fa7] \quad (24)$$

3. Análisis experimental

En esta sección se presentan los resultados del modelo implementado según los conocimientos expuestos en el curso y en la Sección 2. Primeramente se expone un ejemplo de una viga empotrada con un momento en su extremo, se contrastan los resultados numéricos y analíticos. A continuación se realiza el análisis de un pilar a compresión para diferentes imperfecciones, además se construye la curva carga desplazamiento. Por último se analiza una viga doblemente apoyada con una fuerza distribuida, se grafican las deformadas, como también su curva carga-desplazamiento.

3.1. Viga empotrada con momento en el extremo

Se presenta un ejemplo de una viga en voladizo de largo L , sección A e inercia centroidal respecto al eje saliente de la figura I_z . Se aplica un momento M de valor constante en su extremo derecho, esto provoca que el momento flector en la viga sea constante para todo punto y de igual valor al momento externo aplicado. Al deformarse respecto a su configuración de referencia se produce un cierto radio de curvatura ρ , el cual se demostrará es uniforme, siendo el inverso de la curvatura χ . El desplazamiento $y(x)$ representa el desplazamiento según y en la posición x y θ el ángulo que forma la tangente a la curva deformada con el eje x . En la Figura 5 se ilustra un esquema del problema:

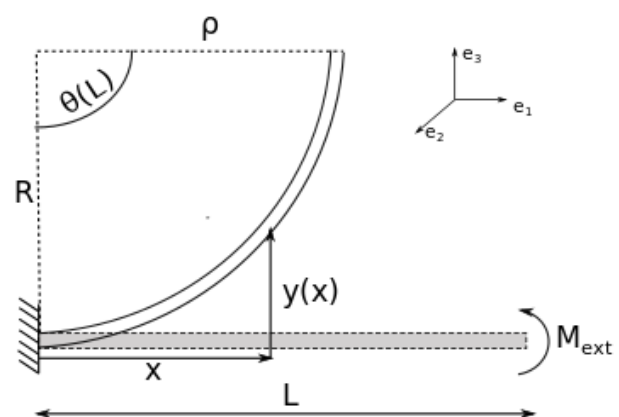


Figura 5: Esquema del problema 1.

3.1.1. Resultados analíticos

Para la obtención de resultados se asumieron las hipótesis basadas en el libro [8]. Considerando que secciones

planas permanecen planas y perpendiculares a la curva de los baricentros en la deformada, se obtiene la expresión de la deformación axial en cualquier punto:

$$\varepsilon(x, y) = \frac{(\rho(x) - y)d\theta - \rho(x)d\theta}{\rho(x)} = \frac{-y(x)}{\rho(x)} \quad (25)$$

En concordancia con las hipótesis consideradas y utilizando entidades geométricas del estilo $\rho(x) = \frac{ds}{d\theta}(x)$ y se obtiene una expresión para el radio de curvatura en función de las derivadas de la flecha como se muestra en la Ecuación (26):

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (26)$$

Considerando un material elástico lineal de módulo E , sección transversal uniforme y definiendo el segundo momento de inercia $I_z = \int_A y^2 dA$ se obtiene:

$$M_{ext} = M(x) = EI_z \chi(x) \quad (27)$$

Para el caso ilustrado en la Figura 5 el momento flector se mantiene constante para todas las secciones a lo largo de la viga, idéntico al valor del momento externo. En la Ecuación (5) todos los factores se mantienen constantes, es por esto que el valor de curvatura es uniforme de igual modo que el radio de curvatura. Sustituyendo la Ecuación (26) en (27) resulta en la ecuación solución de la flecha:

$$M_{ext} = EI_z \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (28)$$

Se propone una solución del tipo circunferencia de radio R ($x^2 + y_{sol}^2 = R^2$) despejando analíticamente se obtiene $y_{sol} = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, se presentan en las Ecuaciones (29) y (30) las derivadas primera y segunda de la solución candidata:

$$\frac{dy_{sol}}{dx} = \pm \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (29)$$

$$\frac{d^2y_{sol}}{dx^2} = \pm \frac{-R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} \quad (30)$$

Se sustituyen las Ecuaciones (29) y (30) en (28) despejándose el radio R de la circunferencia deformada que

debe cumplir y_{sol} :

$$\frac{M}{EI_z} = \frac{(R^2 - x^2)^{3/2}}{R^3} (R^2 - x^2)^{-3/2} \rightarrow R = \frac{EI_z}{M_{ext}} \quad (31)$$

El grado de libertad elegido para la comparación analítica corresponde al ángulo en el extremo θ_L . El ejemplo planteado no implica un esfuerzo axial neto en ninguna sección de la viga, por esta razón el alargamiento será nulo y no cambiará su longitud. La forma circular de la solución permite vincular de forma trigonométrica el ángulo de interés resultando en la siguiente expresión.

$$\theta_L = \frac{M_{ext}L}{EI_z} \quad (32)$$

3.1.2. Resultados numéricos

Para validar el modelo numérico se utilizó la solución en grandes desplazamientos para la viga en voladizo presentado en la Sección 3.1.1. La viga considerada posee una sección circular de diámetro $d = 10 \text{ cm}$, inercia centroidal según la dirección transversal $I_z = \pi d^4/64$, módulo de elasticidad $E = 200 \text{ GPa}$, un coeficiente de Poisson asociado $\nu = 0.3$ y un largo $L = 1 \text{ m}$. El momento externo en el extremo de la viga, es tal que el ángulo sea 2π , este varía entre 0 y $M_{ext} = 6.2 \text{ MN.m}$ en quince pasos.

Se corrió el código para diferentes números de elementos $N_{elem} = [4 \ 8 \ 12 \ 16 \ 22 \ 28 \ 32]$. Se halla numéricamente el valor de los ángulo según e_3 en todos los nodos y se contrastan estos resultados con la fórmula analítica presentada en 3.1.1. En la Figura 6 se muestra la norma de la diferencia considerando desplazamientos analíticos U_a y numéricos verticales U_n en escala logarítmica como función del número de elementos.

A continuación en la Figura 7 para treinta y dos elementos se presenta la viga indeformada en color negro, la viga deformada analítica en color rojo y en azul la curva numérica. Ambas curvas se asocian al momento M_{ext} .

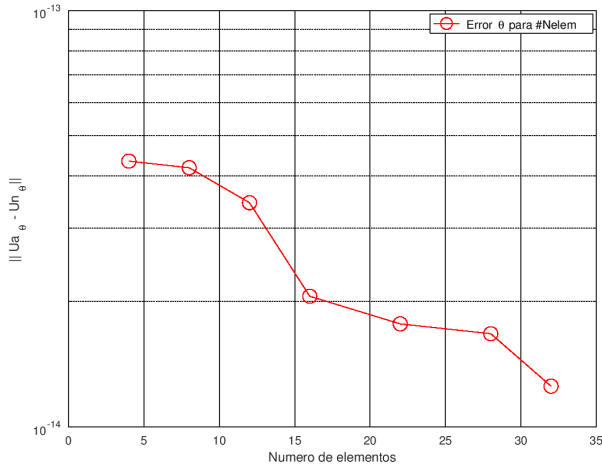


Figura 6: Error en los ángulos a lo largo de la barra para diferentes números de elementos.

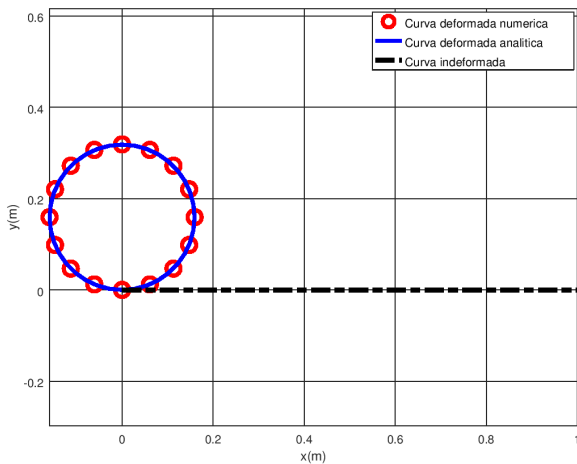


Figura 7: Viga en su configuración: deformada analítica, numérica e indeformada.

3.1.3. Discusión de resultados

En la Figura 7 se destaca que comportamiento es idéntico entre el caso analítico para el valor de M_{ext} estudiado. A partir de esta gráfica, se acepta que el código implementado genera resultados coherentes para casos en los que la condición de carga es un par puro. Por otra parte se hizo un análisis de malla y se concluye que para 4 elementos el sistema ya representa de manera aceptable, siendo el error en los desplazamientos angulares menor a 10^{-13} rad. También conforme se aumenta el numero de elementos el error asociado disminuye, lo que se corresponde con el comportamiento esperado para un código resuelto mediante el Método de Elementos Finitos.

3.2. Viga a compresión 2

En esta sección están presentados los resultados y el análisis de estabilidad de una viga en voladizo cuando es sometida a una fuerza de compresión. Se utilizó además una fuerza en el sentido ascendente para representar efectos de segundo orden (o imperfecciones) esto podría suceder en el caso de que la fuerza no está perfectamente alineada con la barra.

Esta viga de sección cuadrada es conformada con un acero de $E = 210 \text{ Gpa}$ y $\nu = 0.3$, es cuadrada tiene un largo $L = 1 \text{ m}$ una altura de $h = 0.1 \text{ m}$, un área $A = h^2$ y una inercia respecto a cualquiera de sus ejes $I = h^4/12$. La fuerza F_c en el nodo del extremo es de compresión según $-\mathbf{e}_1$ y varía entre 0 N y 5 MN en 50 pasos. La fuerza vertical es multiplicada por una constante que depende del grado de imperfección a analizar en la estructura $F_v = F_c * \text{Imp}$. En la Figura 8 se ilustra un esquema del problema:

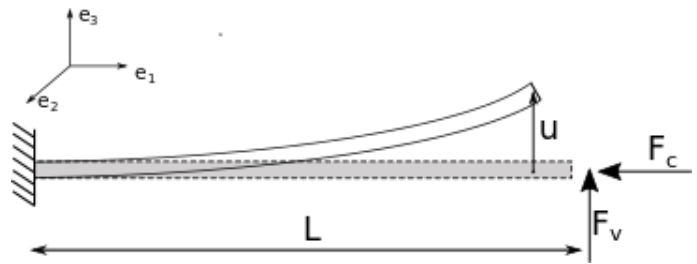


Figura 8: Esquema del problema 2.

3.3. Resultados numéricos

La barra se discretizó en veinte elementos con el objetivo de reproducir correctamente la curva deformada de la viga. Se calculó la carga crítica de Euler según la referencia [4] resultando $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = 4.3 \text{ MN}$, sin imperfecciones la rama fundamental es capaz de soportar hasta este valor permaneciendo estable. Este trabajo busca reproducir el comportamiento de la estructura fuera de la rama fundamental por ende, la carga $F_c > P_{cr}$ y se analizaron diferentes valores de imperfecciones.

En la Figura 9 se muestran las diferentes curvas carga-desplazamientos para distintos niveles de imperfección, como desplazamiento de control se eligió el desplazamiento vertical del nodo en el extremo, asociado a la letra u en la Figura 8.

A continuación para un valor de imperfección 1×10^{-3} se presentan en la Figura 10 las deformadas para dos car-

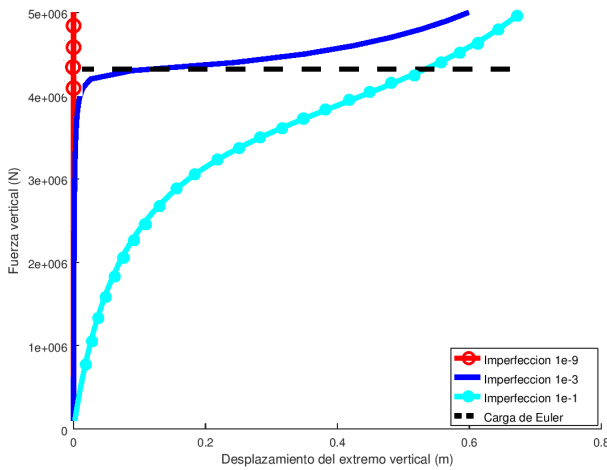


Figura 9: Curvas carga desplazamiento para diferentes valores de imperfección.

Se analizaron casos de $P = 4 \text{ MN}$ y $P = 5 \text{ MN}$, con el objetivo de visualizar el cambio brusco en los desplazamientos reflejado en la curva carga desplazamiento.

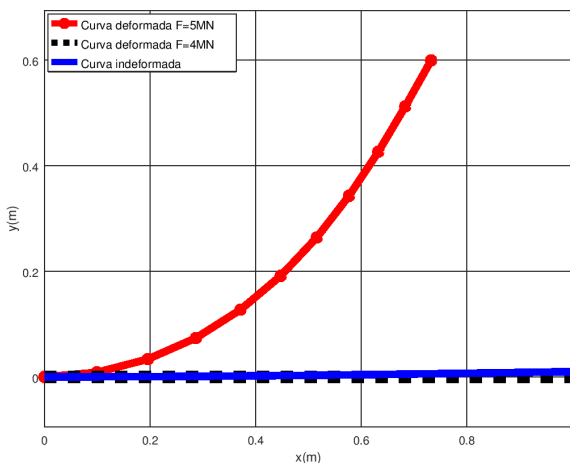


Figura 10: Barras deformadas para distintos niveles de carga y una imperfección de 1×10^{-3} .

3.3.1. Discusión de resultados

En primer lugar se concluye que la reproducción de la curva carga desplazamiento mostrada en la Figura 9 se corresponde con lo expuesto en el curso (ver referencia [3]). A su vez para un grado de imperfecciones bajo, la bifurcación simétrica inestable de la curva carga desplazamiento, ocurre en un valor muy cercano al valor crítico de Euler. No obstante con imperfecciones de 1×10^{-9} el programa reproduce la curva fundamental. Al aumentar el grado de imperfección, el sistema se desplaza en mayor magnitud respecto al mismo nivel de carga, aunque al incrementar

el valor de la carga la diferencia es cada vez menor.

Con respecto a la Figura 10 se percibe el cambio abrupto en la configuración deformada al alcanzarse el valor de la carga crítica. Hasta $F_c = 4 \text{ MN}$ la viga prácticamente no se desplaza (curva azul de la Figura 10), mientras que para $F_c = 5 \text{ MN}$ el punto se desplaza aproximadamente 0.6 m en x y 0.23 m en y (curva roja de la Figura 10). Este fenómeno evidencia que el código es capaz de reproducir la inestabilidad para este tipo de casos.

3.4. Viga sometida a carga distribuida

En este apartado se analizan un ejemplo de análogo al de un cable sujetado en sus extremos sometidos a una determinada carga distribuida q . Este cable tiene una largo $L = 1 \text{ m}$, un diámetro $d = 10 \text{ cm}$. El ejemplo es conformado de un material con módulo de elasticidad $E = 210 \text{ GPa}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Se discretizó en nueve elementos y la carga distribuida, aplicada según el versor $-e_2$, varía entre $0 \frac{N}{m}$ y $9 \times 10^8 \frac{N}{m}$ en un total de quince pasos. Las dimensiones relevantes del problema se esquematizan en la Figura 11.

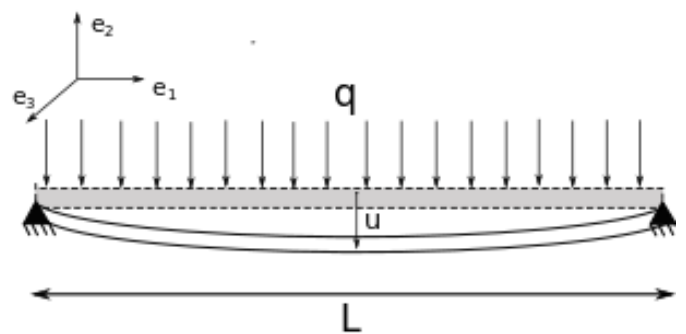


Figura 11: Esquema del problema 3.

A continuación se presenta la curva carga desplazamiento en la Figura 12, se eligió como desplazamiento de control el correspondiente a la coordenada axial $L/2$, representado con la letra u en la Figura 11. Este coincide con el máximo debido a la simetría del problema.

En la Figura 13 se pueden observar la curva indeformada en color negro, y dos configuraciones deformadas para distintos niveles de carga $4.8 \times 10^8 \text{ N/m}$ y $9 \times 10^8 \text{ N/m}$ en azul y rojo respectivamente :

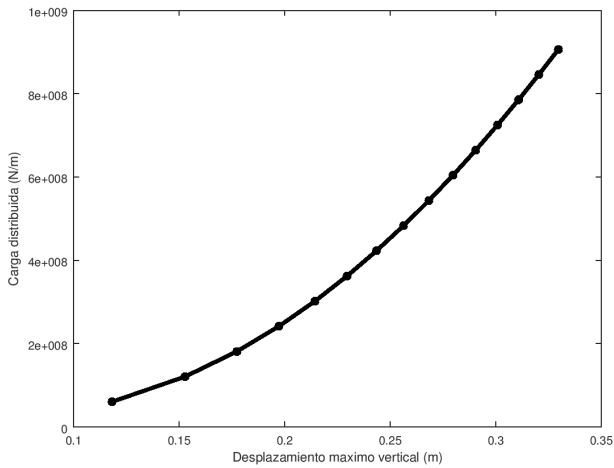


Figura 12: Curva carga desplazamiento.

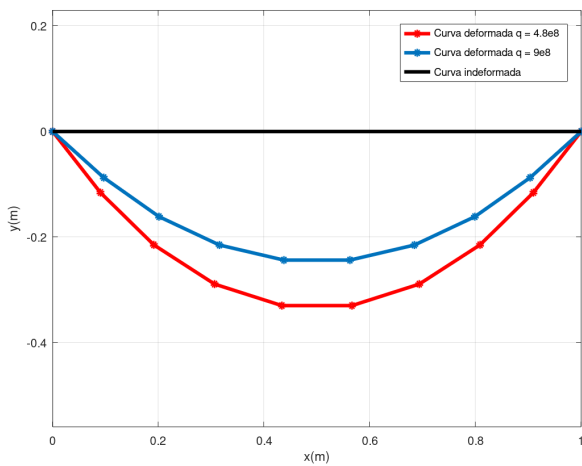


Figura 13: Barras deformadas para distintos niveles de carga.

3.4.1. Discusión de resultados

Se destaca que el sistema es capaz de reproducir coherentemente la deformación de una viga simplemente apoyada con cargas distribuidas, se observa una cierta tendencia asintótica del sistema. Al aumentar la carga el desplazamiento parece aumentar en menor medida, esto se evidencia en la Figura 13, en esta un incremento del doble en la carga no se traduce al desplazamiento de control.

4. Conclusiones y trabajo futuro

El desarrollo profundizó en la implementación de modelos no lineales co-rotacionales para elementos de viga 3D. Se creó una librería que contiene un conjunto de códigos que mediante el Método de Elementos Finitos e iteraciones de Newton-Raphson resuelve dicho problema para diversas condiciones de borde. Los problemas implementados incluyen efectos de grandes desplazamientos. Para escenario de una viga empotrada con un momento en el extremo, presentado en la Sección 3.1 los resultados se validaron satisfactoriamente, esto se justifica debido a que la norma de la diferencia entre los ángulos analíticos y numéricos son menores a 10^{-13} rad para un número de elementos mayor a cuatro.

El estudio de estabilidad evidencia la existencia de cierto valor de compresión para el cual la barra pandea, contrapuesto a un análisis lineal que no presenta ese comportamiento. Los resultados de la Figura 9 obtenidos, indican que es necesario inducir cierto grado de imperfección para poder reproducir el fenómeno de inestabilidad elástica. Esta figura tiene un comportamiento similar a lo expuesto por [3]. Otro resultado no menor muestra que la inestabilidad ocurre para un valor cercano previsto por Euler para el pandeo de una barra esbelta a compresión.

Finalmente, el trabajo presenta de forma efectiva un panorama general de lo relacionado con la teoría de elementos de vigas para grandes deformaciones y su implementación, permitiendo detectar ventajas e inconvenientes de los diferentes métodos utilizados.

Este resulta como un puntapié inicial para continuar con la profundización temática de modelos co-rotacionales, estos tienen como ventaja que la formulación cinemática es independiente de la relación esfuerzo-deformación local. Por ende, se podría implementar el mismo modelo para diferentes modelos materiales considerando no linealidad local. A partir de este modelo es posible extenderlo considerando efectos dinámicos, para eso se utilizaría la referencia [5].

Referencias

- [1] Fausto Saleri Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, NY, USA, second edition, 2007.
- [2] Jean Marc Battini and Costin Pacoste. Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(17-18):1755–1789, 2002.
- [3] Bruno Bazzano and Jorge Perez Zerpa. *Notas del curso de Análisis No Lineal de Estructuras*. Montevideo MVD, UY, 2017.
- [4] Ferdinand Beer, Russell Johnston, John DeWolf, and David Mazurek. *Mecánica de Materiales*. Pearson, Madrid, MAD, España, 2013.
- [5] Thanh Nam Le, Jean Marc Battini, and Mohammed Hjiiaj. A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269:538–565, 2014.
- [6] B. Nour-Omid and C. C. Rankin. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 93(3):353–384, 1991.
- [7] C. C. Rankin and F. A. Brogan. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, 108(2):165–174, 1986.
- [8] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1959.