

Estudio numérico de placas rectangulares finas con grandes desplazamientos

Joaquín Viera Sosa

1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo presentar un análisis no lineal geométrico de placas rectangulares finas con grandes desplazamientos. Se realizará un abordaje analítico utilizando el Principio de Mínima Energía Potencial Total (PMEPT) [Bazzano and Zerpa., 2017] con el cual se obtendrán las cargas críticas para placas con diferentes condiciones de borde sometidas a una carga de compresión uniforme. Posteriormente para las placas estudiadas se realiza un modelo numérico en ONSAS [ONSAS, 2021], donde se busca reproducir mediante un empaillado de elementos de viga 3D no lineal co-rotacional el comportamiento previsto.

Los códigos utilizados en este informe pueden verse en el repositorio público:

<https://gitlab.fing.edu.uy/joaquinv/trabajoANLE>

En los códigos utilizados deberá modificarse el directorio de donde se encuentre ONSAS.

2. Energía Potencial total

2.1. Energía de deformación de placas rectangulares finas

Se consideran placas finas aquellas cuyo espesor h es mucho menor que el resto de las dimensiones de la placa, siendo aceptable considerar que esto se cumple para relaciones $h/l < 0.1$, donde l es cualquiera de las otras dos dimensiones. Además, se considerará que la sección de las placas es uniforme y que el material que la compone es homogéneo. Por otro lado, se considerará en el análisis que las placas se encuentran en su rango elástico.

Se postulan las hipótesis cinemáticas sobre el campo de desplazamientos que se utilizan en la teoría de placas finas, conocidas como hipótesis de Kirchhoff [Yoo and Lee, 2011]:

1. Las secciones normales al plano medio de la placa permanecen rectas, normales e inextensibles durante la deformación de forma que las componentes del tensor de deformaciones γ_{xz} y γ_{yz} pueden ser despreciadas.

2. Las tensiones perpendiculares al plano medio de la placa son pequeñas comparadas con el resto de las tensiones con lo cual la componente del tensor de tensiones σ_z se puede despreciar y además $\varepsilon_z \approx 0$.

De esta forma, el tensor de deformaciones G y de tensiones resultan T :

$$G = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

Se considera que el campo de desplazamientos se puede describir mediante funciones (u, v, w) referidas a los ejes (x, y, z) . La geometría de la placa indeformada se muestra en la Figura 1.

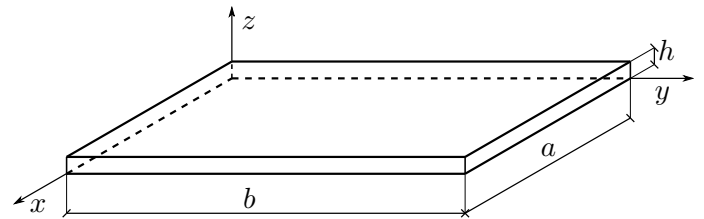


Figura 1: Geometría de la placa en la configuración indeformada.

Para analizar placas finas con grandes desplazamientos mediante el PMEPT se debe plantear la energía de deformación de las placas en la configuración deformada. La expresión de las deformaciones se puede obtener analizando cada plano de forma independiente. Como se expone en [Yoo and Lee, 2011] se tiene:

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (2)$$

$$\varepsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

Se procede ahora a calcular los desplazamientos de cualquier punto en el espesor de la placa. Las magnitudes referidas a un punto en el espesor de la placa se denotan con el símbolo \bar{a} . Se tiene entonces [Yoo and Lee, 2011]:

$$\bar{u} = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \bar{v} = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \bar{w} = w \quad (5)$$

Por lo tanto, las deformaciones $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ y $\bar{\gamma}_{xy}$ resultan:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \varepsilon_x + z k_{11}$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = \varepsilon_y + z k_{22} \quad (6)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y}$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} + 2z k_{12},$$

donde los términos k_{11} , k_{22} y k_{12} refieren a las curvaturas de la placa. Utilizando la relación constitutiva y llamando a E y μ al módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson respectivamente, las tensiones $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ y $\bar{\tau}_{xy}$ resultan:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\bar{\varepsilon}_x + \mu\bar{\varepsilon}_y) \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\bar{\varepsilon}_y + \mu\bar{\varepsilon}_x) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\bar{\gamma}_{xy}\end{aligned}\quad (7)$$

La energía de deformación interna U , siendo V el volumen de la placa es:

$$\frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma}^T : \bar{\varepsilon} dV \quad (8)$$

Operando resulta:

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_V \bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_y^2 + 2\mu\bar{\varepsilon}_x\bar{\varepsilon}_y + \frac{(1-\mu)}{2}\bar{\gamma}_{xy}^2 dV \quad (9)$$

Sustituyendo las expresiones de las deformaciones (Ecuación 6) se puede notar que se puede expresar la energía de deformación interna de la placa como la suma de una componente asociada a las deformaciones axiales U_m y otra asociada a la flexión U_b , $U = U_m + U_b$ [Brush and Almroth., 1975].

$$U_m = \frac{C}{2} \int_A \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{(1-\mu)}{2}\gamma_{xy}^2 dA \quad (10)$$

$$U_b = \frac{D}{2} \int_A k_{11}^2 + k_{22}^2 + 2\mu k_{12} + \frac{(1-\mu)}{2}4k_{12}^2 dA,$$

donde se introducen las constantes C y D que reflejan la rigidez axial y flexional de la placa:

$$C \equiv \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (11)$$

2.2. Trabajo externo de las fuerzas

Se considerará para los casos en estudio que la placa se encuentra sometida a una carga de compresión uniforme N_x aplicada en toda la longitud de uno de los bordes de la placa. Por lo tanto, el trabajo externo W que realiza dicha fuerza se puede expresar como:

$$W = \int_A N_x \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \quad (12)$$

2.3. Energía potencial total

La energía potencial total Π se expresa como [Bazzano and Zerpa., 2017]:

$$\Pi = U_m + U_b - W \quad (13)$$

Las ecuaciones de equilibrio se pueden obtener planteando la primer variación de la energía potencial total y la estabilidad se puede analizar a partir de la segunda variación [Crisfield, 1996, Thompson and Hunt, 1973]. Un tratamiento matemático sobre las variaciones se puede encontrar en [Brush and Almroth., 1975, Bathe, 1996].

Las condiciones anteriores se expresan matemáticamente como:

$$\begin{aligned}\text{Equilibrio: } \delta\Pi &= \delta U_m + \delta U_b - \delta W = 0 \\ \text{Estabilidad: } \delta^2\Pi &= \delta^2 U_m + \delta^2 U_b - \delta^2 W > 0\end{aligned}\quad (14)$$

En el estudio post-crítico de las placas se debe utilizar la energía de deformación interna completa, es decir considerando las componentes U_m y U_b . Para el caso de que se desee obtener la carga crítica N_{cr} para la cual la placa se inestabiliza, se puede despreciar la componente de la energía deformación axial U_m . Esta hipótesis surge de considerar que la placa es inextensible [Timoshenko and Gere, 1985, Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1987]. Por ende, de esta hipótesis se deduce que las deformaciones ε_x , ε_y y γ_{xy} son nulas. En este caso de la Ecuación 2 se tiene:

$$\varepsilon_x \approx 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (15)$$

Con lo cual, el trabajo de la fuerza externa W resulta:

$$W = -\frac{1}{2} \int_A N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (16)$$

3. Placa simplemente apoyada en 2 bordes

Se considera una placa de dimensiones a y b según los ejes x y y respectivamente y espesor h simplemente apoyada en 2 extremos paralelos al eje y y con los extremos paralelos al eje x restringidos con respecto al desplazamiento v . La misma se somete a una carga de compresión uniforme como fue mencionado en Subsección 2.2. En la Figura 2 se muestra la geometría y condiciones de borde.

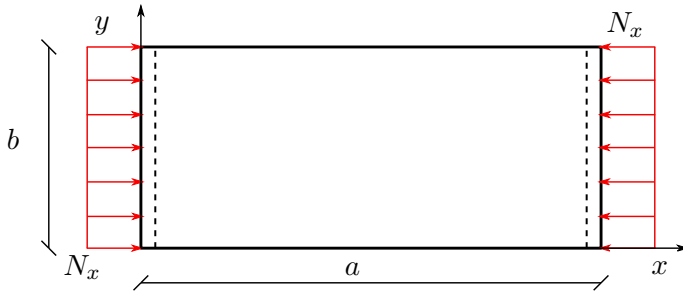


Figura 2: Placa simplemente apoyada.

Esta placa es equivalente a la columna de Euler en el caso de vigas.

3.1. Carga crítica

Para el análisis de la carga crítica de la placa perfecta mediante el PMEPT se propone una deformada $w(x)$:

$$w(x) = w_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) \quad (17)$$

La deformada propuesta cumple con las condiciones de borde $w(x) = w(a) = 0$ y $w_{xx}(0) = w_{xx}(a) = 0$ correspondientes a desplazamiento lateral y momento flector nulo. Como se conoce que la placa se comporta como una columna de Euler se asume que la misma no presenta curvatura en el sentido y (consistente con una deformada cilíndrica), por ende la función w propuesta no tiene componentes según y . Además, a efectos de obtener la carga crítica de la placa, se supondrá que la misma es inextensible, por lo tanto, no interesa proponer funciones u o v .

Dado que no existe curvatura según y , la única componente de la energía de deformación interna que se debe calcular es k_{11} . Se tiene entonces:

$$U = U_b = \frac{D}{2} \int_A k_{11}^2 dA = \frac{D}{2} \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dA \quad (18)$$

$$U = \frac{ab}{4} D w_0^2 \frac{\pi^4}{a^4}$$

El trabajo externo W se expresa como:

$$W = -\frac{1}{2} \int_A N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA = \frac{ab}{4} N_x w_0^2 \frac{\pi^2}{a^2} \quad (19)$$

Donde se utilizó que la carga N_x es negativa si es de compresión. De donde la energía potencial total Π es:

$$\Pi = \frac{ab}{4} D w_0^2 \frac{\pi^4}{a^4} - \frac{ab}{4} N_x w_0^2 \frac{\pi^2}{a^2} \quad (20)$$

Se calcula la primer variación $\delta\Pi$:

$$\frac{\delta\Pi}{\delta w_0} = \frac{ab}{2} D w_0 \frac{\pi^4}{a^4} - \frac{ab}{2} N_x w_0 \frac{\pi^2}{a^2} \quad (21)$$

La segunda variación $\delta^2\Pi$ e imponiendo la condición de estabilidad resulta:

$$\frac{\delta^2\Pi}{\delta w_0^2} = \frac{ab}{2} D \frac{\pi^4}{a^4} - \frac{ab}{2} N_x \frac{\pi^2}{a^2} > 0 \Rightarrow N_x < \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (22)$$

Resultando la carga crítica de la placa N_{cr} :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (23)$$

Se observa que la misma tiene forma análoga a la carga crítica de la columna de Euler $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{a^2}$.

3.2. Modelo con emparrillado

Se realiza en ONSAS [ONSAS, 2021] el modelo de la placa con un emparrillado de vigas. Se utilizan seis columnas y once vigas. Los parámetros geométricos y de rigidez son $E = 30$ GPa, $a = 5$ m, $b = 1$ m y $h = 0,10$ m. La cantidad de vigas y de columnas fue escogida según recomendaciones de [Hambly, 1991]. Entre estas recomendaciones se tiene que la separación de columnas se encuentre entre dos y tres veces el espesor de la placa como mínimo y como máximo separadas $1/4$ de la luz. La separación de vigas transversales no puede exceder $1/4$ de la luz mayor de la placa y debe ser similar a la separación de las columnas. Además de las recomendaciones anteriores, se verificó que en un análisis lineal el emparrillado presentara el mismo desplazamiento que una placa sometida a una carga uniformemente distribuida.

Se modela la columna con una imperfección inicial en los nodos del extremo cargado, equivalente a un momento flector de valor $P/400$, siendo $P = -1$ kN la carga axial aplicada en los nodos de las columnas. Se utiliza el método de Newton-Raphson incremental, con setenta pasos de carga y con incrementos de carga de múltiplos de quince. De esta forma, la carga final sobre la estructura será $N_x = 1050$ kN. En cada paso del método, se incrementa la carga P y la imperfección en la misma proporción. Se utilizan como criterios de parada del método, diez iteraciones por cada paso y $1 \cdot 10^{-6}$ para la convergencia de desplazamientos y de fuerzas. La geometría indeformada de la placa se puede observar en la Figura 3.

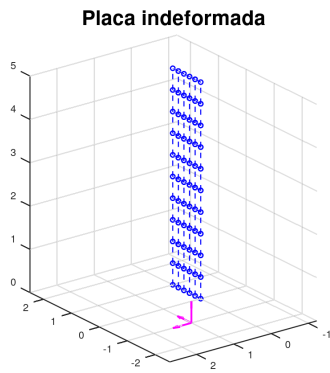


Figura 3: Geometría indeformada.

La carga crítica para la placa perfecta es $N_{cr} = 1028,1$ kN, la cual será superada en el análisis. En la Figura 4 se grafica el desplazamiento lateral w del nodo central del emparrillado en función de la carga.

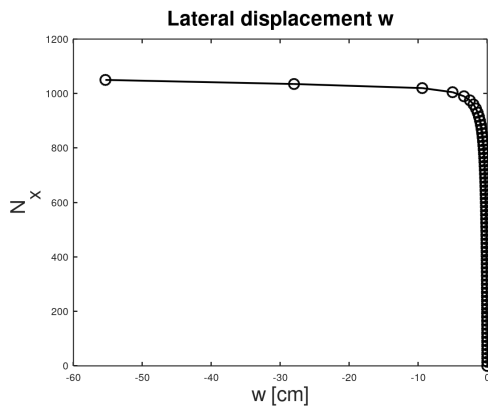


Figura 4: Desplazamiento lateral w en función de la carga.

Es de interés además graficar el desplazamiento longitudinal de la placa de un nodo del extremo cargado. En la Figura 5 se tiene el gráfico del desplazamiento en función de la carga.

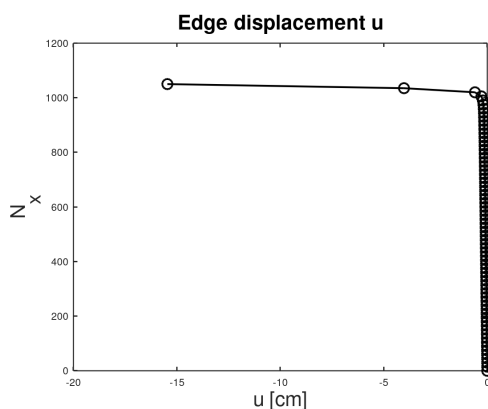


Figura 5: Desplazamiento longitudinal u en función de la carga.

Amplificando la gráfica en el momento que se alcanza la inestabilidad, se observa mejor el cambio de pendiente en la rigidez axial, ver Figura 6.

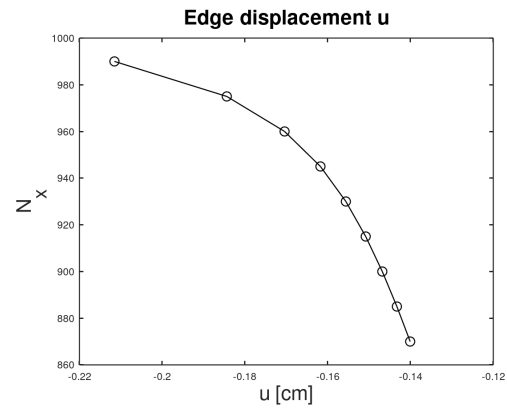


Figura 6: Desplazamiento longitudinal u en función de la carga.

Se observa en la Figura 5 una pérdida de rigidez axial luego de alcanzar la carga crítica pero manteniendo un comportamiento inmediatamente lineal. Analizando la pendiente de la recta post-crítica, se tiene:

$$K_{post} = \frac{\Delta P}{\Delta U} \approx 21293,89 \tag{24}$$

$$\frac{K_{post}}{K_{pre}} = 3,3 \cdot 10^{-2}$$

En la Figura 7 se muestra la geometría deformada de la placa para el último paso de carga. En gris se observa la geometría del emparrillado en su configuración inicial.

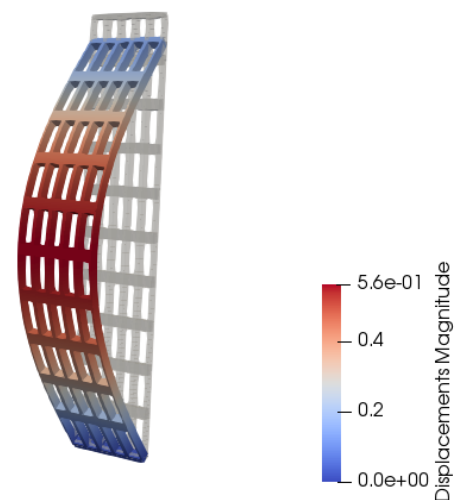


Figura 7: Deformada de la placa.

Dado que se modeló en ONSAS el emparrillado con Newton-Raphson y con una imperfección inicial, no se

puede obtener de forma directa la carga crítica. Como se observó anteriormente, la pérdida de rigidez axial del empujamiento es mucho más inmediata que la pérdida de rigidez que se observa para el desplazamiento lateral. En base a este hecho, se tomó como criterio encontrar la carga crítica del modelo utilizando el cociente entre desplazamientos longitudinales normalizados con el incremento de carga en cada paso. Este cociente luego se lo comparó con un factor de 0.15. En la **Cuadro 1** se presentan los valores de carga crítica teórico ($N_{cr,t}$) y numérico ($N_{cr,n}$). Se podría haber calculado la carga crítica también utilizando el método gráfico Southwell plot.

$N_{cr,t}$ (kN)	$N_{cr,n}$ (kN)	err (%)
1028.1	990.0	3.7

Cuadro 1: Comparación entre cargas críticas teórica y numérica.

Se realizó un modelo adicional en el que se fijó el desplazamiento de los nodos de los bordes longitudinales según el eje y obteniendo la misma carga crítica que la expuesta anteriormente.

4. Placa simplemente apoyada en 4 bordes

Se considera una placa con la misma geometría que fue indicada en la **Figura 8** pero con los cuatro bordes simplemente apoyados.

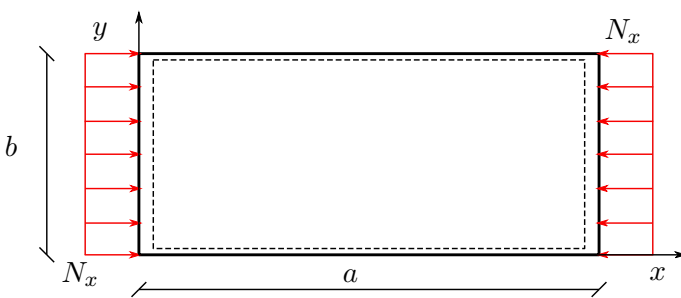


Figura 8: Placa simplemente apoyada.

Las condiciones de borde en término de los desplazamientos en los apoyos se indican a continuación.

$$\begin{aligned} w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(a, y) = 0, \\ u(0, y) = 0, \\ v(0, y) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

La placa se encuentra sometida a una carga de compresión uniforme en el borde (a, y).

4.1. Carga crítica

Se propone una deformada $w(x, y)$ que cumpla con las condiciones de borde:

$$w(x, y) = A \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (26)$$

Donde m y n , son números naturales que cumplen $m > 0$, $n > 0$ y que reflejan la cantidad de ondas que puede tener la deformada de la placa como se plantea en [Timoshenko and Gere, 1985].

Se calcula la energía de deformación por flexión U_b de acuerdo a la **Ecuación 10**. Se presentan los resultados de las integrales de las curvaturas de forma independiente.

$$\int_A k_{11}^2 dA = \frac{A^2 m^4 \pi^4}{a^4} \frac{ab}{4} \quad (27)$$

$$\int_A k_{22}^2 dA = \frac{A^2 n^4 \pi^4}{b^4} \frac{ab}{4} \quad (28)$$

$$2\mu \int_A k_{11} k_{22} dA = 2\mu \frac{A^2 m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \frac{ab}{4} \quad (29)$$

$$2(1 - \mu) \int_A k_{12}^2 dA = 2(1 - \mu) \frac{A^2 m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \frac{ab}{4} \quad (30)$$

La energía de deformación flexional U_b resulta:

$$U_b = \frac{ab}{8} D A^2 \pi^4 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 \quad (31)$$

El trabajo de las fuerzas externas resulta:

$$W = -\frac{1}{2} \int_A N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA = \frac{ab}{8} N_x A^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad (32)$$

donde se utilizó que la carga N_x es negativa si es de compresión. La energía potencial total Π resulta:

$$\Pi = \frac{ab}{8} D A^2 \pi^4 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 - \frac{ab}{8} N_x A^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad (33)$$

La primer variación respecto $\partial \Pi$ a la variable A es:

$$\delta \Pi = \frac{ab}{4} D A \pi^4 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 - \frac{ab}{4} N_x A \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad (34)$$

Imponiendo la condición de estabilidad y calculando la segunda variación $\delta^2 \Pi$ se tiene:

$$\delta^2 \Pi = \delta \Pi = \frac{ab}{4} D \pi^4 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 - \frac{ab}{4} N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} > 0 \quad (35)$$

Por lo tanto, la carga crítica N_{cr} de la placa es:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 \quad (36)$$

La carga crítica mínima se obtiene cuando $m = n = 1$ correspondiendo a una sola onda en cada dirección x e y , resultando:

$$N_{cr} = \pi^2 a^2 D \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^2 \quad (37)$$

Se observa que si la placa es infinitamente larga ($b \rightarrow \infty$) el resultado anterior coincide con el presentado en la [Subsección 3.1](#).

4.2. Modelo con emparrillado

Se realiza en ONSAS [[ONSAS, 2021](#)] el modelo de la placa con un emparrillado de veintún columnas y once vigas. Los parámetros geométricos y de rigidez son $E = 30$ GPa, $a = 5$ m, $b = 4$ m y $h = 0,05$ m. Se modela la columna con una imperfección inicial en los nodos del extremo cargado, equivalente a un momento flector de valor $P/9000$, siendo $P = -4$ kN la carga en los nodos de las columnas. Se utiliza el método de Newton-Raphson incremental, con cincuenta pasos de carga y con incrementos de carga de múltiplos de uno. De esta forma, la carga final sobre la estructura será $N_x = 4200$ kN. En cada paso del método, se incrementa la carga P y la imperfección en la misma proporción. Se utilizan como criterios de parada del método, diez iteraciones por cada paso y $1 \cdot 10^{-6}$ para la convergencia de desplazamientos y de fuerzas. La geometría indeformada de la placa se puede observar en la [Figura 9](#).

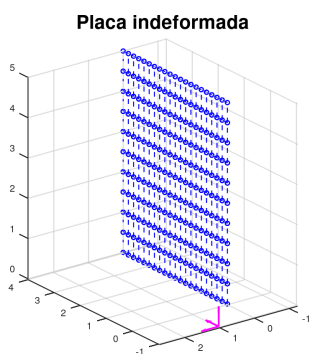


Figura 9: Geometría indeformada.

La carga crítica para la placa perfecta es $N_{cr} = 3375.4$ kN, la cual es superada en el análisis. En la [Figura 10](#) se grafica el desplazamiento lateral w del nodo central del emparrillado en función de la carga.

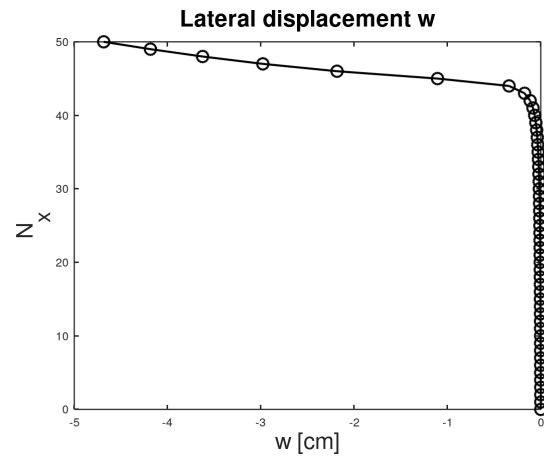


Figura 10: Desplazamiento lateral w en función de la carga.

En la [Figura 11](#) se tiene el gráfico del desplazamiento longitudinal en función de la carga.

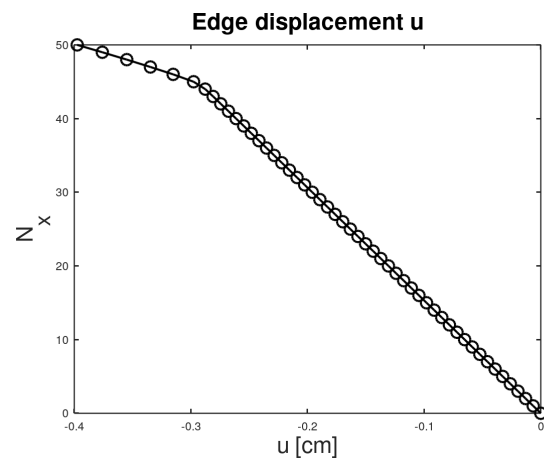


Figura 11: Desplazamiento longitudinal u en función de la carga.

Se observa en la [Figura 11](#) una pérdida de rigidez axial luego de alcanzar la carga crítica pero manteniendo un comportamiento inmediatamente lineal. Analizando la pendiente de la recta post-crítica, se tiene:

$$\frac{K_{post}}{K_{pre}} \approx 0,335 \quad (38)$$

De donde se observa que este valor es similar al que se menciona en [[Becque, 2020](#)].

En la [Figura 12](#) se muestra la geometría deformada de la placa para el último paso de carga.

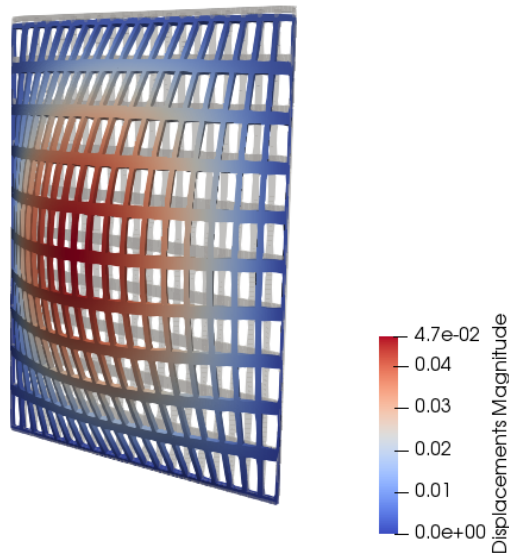


Figura 12: Deformada de la placa.

Observando el gráfico de desplazamiento longitudinal (Figura 11) se puede obtener la carga crítica correspondiendo al factor de carga donde ocurre el cambio de pendiente. Se observa que el cambio de pendiente se da para el factor $\lambda=44$. Se tiene por lo tanto $N_{cr,1}=3696$ kN.

Se realiza un modelo ahora en el que se ajusta la rigidez a torsión de las vigas y columnas del emparrillado. Se considera como rigidez torsional J_p de la placa la de una sección abierta de pared delgada, teniendo $J_p = b \cdot h^3 / 6$ como se justifica en [Hambly, 1991], siendo b el ancho de la placa. El gráfico del desplazamiento longitudinal en función de la carga se tiene en la Figura 13.

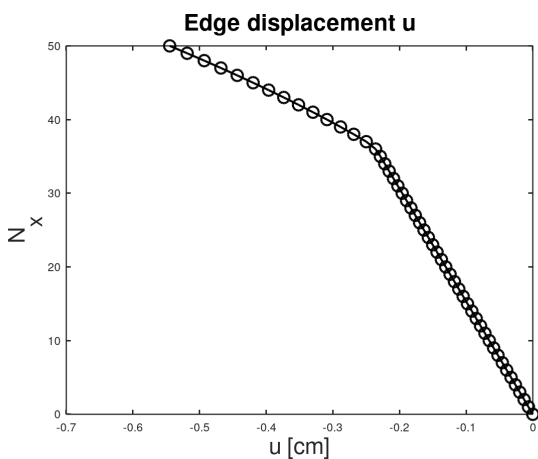


Figura 13: Desplazamiento longitudinal u en función de la carga.

De forma análoga, la carga crítica se da para el factor de carga $\lambda = 36$, resultando que la carga crítica es $N_{cr,2} = 3024$ kN. En el Cuadro 2 se presenta la comparación de

las cargas críticas numéricas para ambos casos con la carga crítica teórica.

$N_{cr,t}$ (kN)	$N_{cr,1}$ (kN)	err (%)	$N_{cr,2}$ (kN)	err (%)
3375.4	3696.0	-9.5	3024.0	10.4

Cuadro 2: Comparación entre cargas críticas teórica y numérica para ambos modelos.

5. Conclusiones y futuros trabajos

Se ha podido comprobar mediante los modelos realizados que es posible modelar placas finas utilizando un emparrillado compuesto por elementos de viga 3D no lineal co-rotacional. En particular se ha podido apreciar en el caso de la placa con dos bordes simplemente apoyados y dos bordes libres un comportamiento cualitativamente similar en los gráficos $N_x - w_0$ y $N_x - u_0$ a los de la columna de Euler, además de presentar una carga crítica cercana a la teórica.

En cuanto a la placa simplemente apoyada, se logró obtener el comportamiento teórico previsto mediante el modelado con el emparrillado de vigas. Para este caso, dado que la placa presenta curvatura en ambos sentidos, es necesario realizar una buena estimación de la rigidez a torsión de los elementos que componen el emparrillado, observándose este hecho en particular en el Cuadro 2.

Como trabajos futuros sería interesante poder lograr reproducir pandeos locales de placas mediante el emparrillado de vigas. Previo a este paso, sería conveniente reproducir un pandeo por corte de una placa con el fin de validar que el emparrillado logre reproducir la rigidez a a corte. Por otro lado, para validar que luego de alcanzada la carga crítica el emparrillado reproduce la rigidez de la placa, se deberían obtener las directas en las columnas y observar la redistribución de esfuerzos hacia los bordes de la placa.

Referencias

- [Bathe, 1996] Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. PRENTICE HALL.
- [Bazzano and Zerpa., 2017] Bazzano, J. B. and Zerpa., J. P. (2017). *Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras*.
- [Becque, 2020] Becque, J. (2020). *Linking the von Karman equations to the design of steel plates*.
- [Brush and Almroth., 1975] Brush, D. O. and Almroth., B. O. (1975). *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. MCGRAW-HILL.
- [Crisfield, 1996] Crisfield, M. A. (1996). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Essentials*. Wiley.
- [Hambly, 1991] Hambly, E. C. (1991). *Bridge Deck Behaviour*.
- [ONSAS, 2021] ONSAS (2021). ONSAS: an open non-linear structural analysis solver. <https://github.com/ONSAS/ONSAS.m>.
- [Thompson and Hunt, 1973] Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W. (1973). *A General Theory of Elastic Stability*. Wiley.
- [Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1987] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1987). *Theory of plates and shells*. MCGRAW-HILL.
- [Timoshenko and Gere, 1985] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1985). *Theory of Elastic Stability*. MCGRAW-HILL.
- [Yoo and Lee, 2011] Yoo, C. H. and Lee, S. C., editors (2011). *Stability of Structures*. Butterworth-Heinemann, Boston.