

### Ejercicio 1

- a) Se tiene una estructura cuyo vector de fuerzas internas está dado por  $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u})$ , donde  $\mathbf{u}$  es un vector columna de tamaño  $n$  con los desplazamientos nodales incógnitas. Se quiere encontrar los desplazamientos de equilibrio de la estructura para una cierta carga cuasi-estática dada por el vector de fuerzas externas  $\mathbf{f}_{ext}$ . La condición de equilibrio está dada por el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

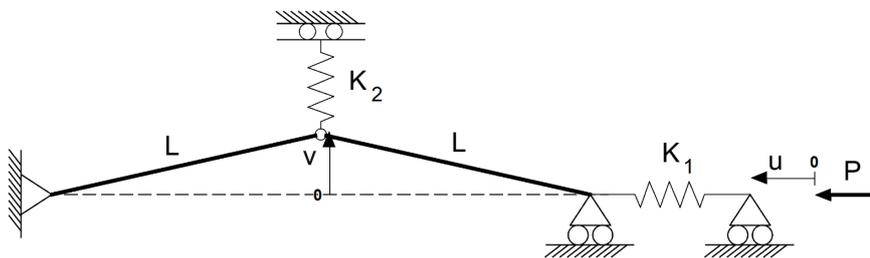
$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{ext} = 0.$$

Asumiendo que existe el equilibrio estable de la estructura y que usted cuenta con una estimación de la solución dada por  $\mathbf{u}^{(0)}$ : presente un método iterativo para la resolución del sistema de ecuaciones no lineales y al menos dos criterios de parada.

- b) Suponga que va a realizar un análisis computacional de colapso de una estructura, es decir un análisis con no linealidad geométrica y material con imperfecciones (GMNIA). Describa brevemente uno de los análisis estructurales intermedios (excluyendo el análisis lineal) que haría antes de alcanzar el análisis GMNIA. Presente un bosquejo de la respectiva curva de carga-desplazamiento.

### Ejercicio 2

Se estudiará el equilibrio y estabilidad de la estructura mostrada en la siguiente figura. En la misma se muestra la estructura en una configuración deformada.



Las barras son perfectamente rígidas y los resortes elásticos lineales con constantes elásticas dadas en la figura. La estructura es perfecta, es decir recta y sin tensiones en los resortes cuando  $P = 0$ ,  $u = 0$  y  $v = 0$ .

Se sugiere trabajar con los grados de libertad indicados en la figura, pero se aceptan grados de libertad alternativos.

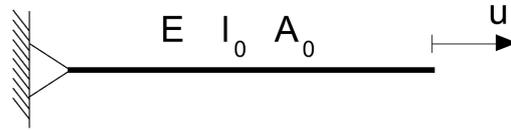
- Escribir la expresión de la energía potencial total para la estructura dada.  
Truncar la expresión hallada usando que si  $x \simeq 0$  entonces  $\sqrt{1 - x^2} \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$
- Enunciar los axiomas de estabilidad y equilibrio del PMEPT.
- Deducir la expresión de la curva carga-desplazamiento Fundamental ( $P \geq 0$ ).
- Estudiar la estabilidad de la curva Fundamental. Hallar el punto crítico, dando la carga crítica  $P_{cr}$  y los valores críticos de las coordenadas  $u_{cr}$ ,  $v_{cr}$ . Hallar el correspondiente modo de pandeo y hacer el croquis de la deformada de la estructura al bifurcar.
- Describir brevemente cómo modelaría la estructura en NSA (nodos, conectividad, comportamiento constitutivo, etc). Discutir cómo modelar las barras rígidas y cómo incorporar los resortes elásticos lineales en el modelo.

### Ejercicio 3

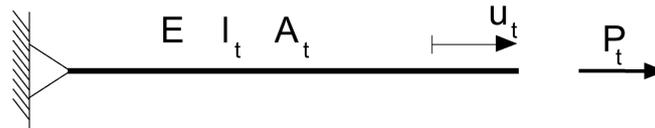
Dada una barra recta sometida únicamente a fuerza directa como se muestra en la figura, se desea estudiar las relaciones fuerza desplazamiento que se obtienen de usar distintas medidas de deformación.

Se define el desplazamiento del extremo cargado de la barra como  $u_t$ . Cuando la fuerza externa es nula ( $P_t = 0$ ) el desplazamiento es nulo ( $u_0 = 0$ ) y el largo de la barra es el de referencia  $l_0$ .

Configuración Referencia



Configuración Deformada



Se asumirá que el área de la configuración deformada ( $A_t$ ) es igual al área de la configuración inicial ( $A_0$ ). También se asumirá comportamiento material elástico lineal para todas las medidas de deformación  $\sigma = E\varepsilon$ .

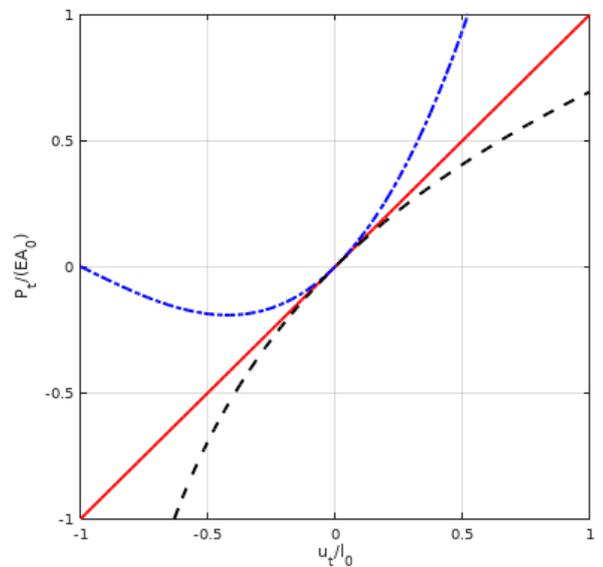
a) Calcular las siguientes deformaciones unitarias ( $\varepsilon$ ) y sus correspondientes variaciones ( $\delta\varepsilon$ ) para una configuración deformada dada por  $u_t$ :

- Deformación Ingenieril Rotada:  $\varepsilon_E$ .
- Deformación de Green:  $\varepsilon_G$ .
- Deformación Logarítmica Rotada:  $\varepsilon_L$ .

b) Calcular las relaciones fuerza desplazamiento para cada una de las medidas de deformación consideradas. Para cada una de las medidas de deformación expresar los resultados como  $P_t = f_i(\frac{u_t}{l_0})$ , con  $i = \{E, G, L\}$ .

c) Considerando el gráfico de la derecha:

- identificar qué curva de carga deformación corresponde a cada una de las medidas de deformación,
- comentar sobre la efectividad de la deformación de Green, con modelo material elástico lineal, para analizar barras sometidas a grandes deformaciones unitarias de compresión.



Relaciones Fuerza-Desplazamiento: Barra sometida a carga axial

## Solución Prueba Escrita

### Ejercicio 1

- 1) Se presenta el método de Newton-Raphson para la solución del sistema de ecuaciones no lineales de equilibrio

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{ext} = 0.$$

Linealizamos la ecuación no lineal en torno al vector  $\mathbf{u}^{(k)}$  de la iteración:

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{f}_{ext} \simeq 0.$$

Resolviendo la ecuación linealizada se obtiene el próximo iterado ( $\mathbf{u}^{(k+1)}$ ),

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = - \left( \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{f}_{ext} \right),$$

donde  $\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}$ .

$\mathbf{K}_T^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)})$  es la matriz de rigidez tangente de la estructura en la iteración actual.

$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{f}_{ext}$  es el vector de des-balance de fuerzas nodales en la iteración actual.

El algoritmo de N-R consiste en, partiendo de un vector de arranque  $\mathbf{u}^{(0)}$ , calcular nuevos iterados  $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}$  mediante la resolución de los sistemas lineales:  $\mathbf{K}_T^{(k)} \Delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{r}^{(k)}$ .

Los criterios de parada pueden ser:

- Se alcanza un máximo pre-establecido de iteraciones:

$$k = \text{MAXITER}$$

- Se satisface una tolerancia en desplazamientos:

$$\|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\| / \|\mathbf{u}^{(k)}\| < \text{tol}_u$$

- Se satisface una tolerancia en des-balance de fuerzas:

$$\|\mathbf{r}^{(k)}\| / \|\mathbf{f}_{ext}\| < \text{tol}_f$$

- 2) En esta pregunta se admite que se describan uno de los siguientes análisis:

- LBA: Análisis de Pandeo Lineal.
- GNA: Análisis con no linealidad geométrica, estructura perfecta.
- GNIA: Análisis con no linealidad geométrica, estructura imperfecta.
- MNA: Análisis con no linealidad material.

## Ejercicio 2

1) El acortamiento del Resorte 1 ( $\delta_1$ ) en función de  $u$  y  $v$  es igual a:

$$\delta_1 = 2L - 2\sqrt{L^2 - v^2} - u = 2L \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{L}\right)^2} \right] - u \simeq L \left(\frac{v}{L}\right)^2 - u$$

La energía potencial total es igual a:

$$V(u, v) = U(u, v) - P\Delta(u, v)$$

Donde  $U(u, v)$  es la energía elástica interna y  $P\Delta(u, v)$  es el trabajo de las fuerzas externas.

$$V(u, v) = \frac{1}{2}K_1 \left[ L \left(\frac{v}{L}\right)^2 - u \right]^2 + \frac{1}{2}K_2 v^2 - Pu$$

2) **Equilibrio:**

- La estructura está en equilibrio en  $\mathbf{u} \Leftrightarrow$  la energía potencial total es estacionaria en  $\mathbf{u}$ .

**Estabilidad:**

- La estructura está en equilibrio estable en  $\mathbf{u} \Leftrightarrow$  la energía potencial total tiene un mínimo relativo estricto en  $\mathbf{u}$ .

3) Usando el axioma de equilibrio y dado que la energía potencial total es diferenciable:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}} = \vec{0}$$

Lo cual implica:

$$\frac{\partial V(u, v)}{\partial u} = -K_1 \left[ L \left(\frac{v}{L}\right)^2 - u \right] - P = 0$$

$$\frac{\partial V(u, v)}{\partial v} = v \left\{ \frac{2K_1}{L} \left[ L \left(\frac{v}{L}\right)^2 - u \right] + K_2 \right\} = 0$$

Así se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$-K_1 L \left[ \left(\frac{v}{L}\right)^2 - \frac{u}{L} \right] = P$$

$$v \left\{ 2K_1 \left[ \left(\frac{v}{L}\right)^2 - \frac{u}{L} \right] + K_2 \right\} = 0$$

Con lo cual, el camino de carga fundamental ( $F$ ) consiste de los siguientes puntos de equilibrio:

$$v^F = 0 \quad \text{y} \quad u^F = P/K_1 \quad \text{para todo} \quad P \geq 0$$

4) La condición de punto crítico está dado por el axioma de estabilidad y dado que la energía potencial total es diferenciable un equilibrio será crítico cuando:

$$|\mathbf{H}_V(u, v)| = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{bmatrix} \right| = 0$$

Con lo cual:

$$|\mathbf{H}_V(u, v)| = \left| \begin{bmatrix} K_1 & -2K_1 \frac{v}{L} \\ -2K_1 \frac{v}{L} & K_1 \left( 6 \left( \frac{v}{L} \right)^2 - 2 \frac{u}{L} \right) + K_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

En el camino fundamental obtenemos:

$$|\mathbf{H}_V(u, v)|^F = \left| \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 - 2P^C/L \end{bmatrix} \right| = 0$$

Por lo tanto tenemos que el punto crítico satisface:

$$u^C = \frac{K_2}{K_1} L \quad , \quad v^C = 0 \quad \text{y} \quad P^C = \frac{K_2 L}{2}.$$

El modo de pandeo corresponde al vector de desplazamientos  $\Delta \mathbf{u}$  que verifica:

$$\mathbf{H}_V(u^C, v^C) \Delta \mathbf{u} = 0.$$

Eso es igual a:

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, normalizando el modo para que tenga amplitud 1:

$$\Delta u = 0 \quad \text{y} \quad \Delta v = 1.$$

- e) Se pueden usar dos bielas de green con material elástico lineal y rigidez axial mucho mayor ( $\times 1000$ ) a la de los resortes de manera de modelar las barras rígidas.

El Resorte 2 se puede modelar con un resorte a tierra con constante  $K_2$ .

El Resorte 1 se puede modelar con un elemento de barra lineal sin no linealidad geométrica ó un elemento de biela con deformación unitaria Ingenieril Rotada. Otra opción es usar un resorte con vínculo a tierra para modelar el Resorte 1 y dejar libre con carga  $P$  el otro extremo de la estructura.

Dependiendo de la solución que se elija se da la numeración de nodos, conectividad y condiciones de apoyo de la estructura, en forma de tabla o croquis.

Un ejemplo de código de entrada admisible para el NSA sería

Listado de Código 1: Ejemplo código de entrada NSA según solución.

```

1  % -----
2  % Ejemplo Estructura con Snapback:
3  % Estructura equivalente a la de la prueba escrita de Nov 2017.
4  % Unidades: F:Newton, L:mm, A:mm2, sig:N/mm2 y K:N/mm.
5  % -----
6
7  problemname = 'PruebaEscrita' ;
8
9  Em = 2.1e5; % Defino modulo elasticidad material
10
11 HyperElasParams = cell(1,1) ;
12 HyperElasParams{1} = [1 Em] ;
13
14 L = 500;      % largo de bielas rigidas
15 K1 = 40;     % resorte axial mas flexible que resorte lateral (K1/K2 = 0.2)
16 K2 = 200;   % resorte lateral
17 e = L/100;  % imperfeccion para observar bifurcacion y Snap-back
18 As = L/Em*100*max(K1,K2); % Bielas son 100 veces mas rigidas que resorte mas rigido.
19

```

```

20 Nodes = [ 0 0 ; ...
21           e -L ;
22           0 -2*L ] ;
23
24 Conec = [ 1 2 1 1 ;
25           2 3 1 1 ] ;
26
27 fixeddofs = [ 1 5 ] ;
28
29 % external unitary loads vector
30 Fext      = [0; -K2*L/2; 0; 0; 0; 0]; % cargo con Pcrit = K2*L/2.
31
32 % earthed springs
33 Springs = [ 2 K2 0 ; % resorte lateral
34             3 0 K1 ]; % resorte axial
35
36 controldof = -2; % observamos desplazamiento axial
37
38 % imperfection
39 targetLoadFctr = 1.5 ;
40 nLoadSteps     = 400 ;
41 incremarclen   = 18 ;
42 LinBuckModeImperf = 0 ;
43 solutionMethod = 2 ;
44
45 printflag = 0;
46
47 % nonlinear iteration parameters
48 NRtolits     = 30 ;
49 NRtoldeltau  = 1.0e-8 ;
50
51 diridofs = fixeddofs ;
52
53 %-----

```

### Ejercicio 3

1) Se tiene que:  $l_t = l_0 + u_t$ .

- Deformación Ingenieril Rotada:  $\varepsilon_E = \frac{l_t - l_0}{l_0}$ .

Con lo cual,  $\varepsilon_E = \frac{u_t}{l_0}$ .

Y la variación se calcula como:  $\delta\varepsilon_E = \frac{\partial\varepsilon_E}{\partial u} \delta u = \frac{1}{l_0} \delta u$

- Deformación de Green:  $\varepsilon_G = \frac{l_t^2 - l_0^2}{2l_0^2}$ .

Con lo cual,  $\varepsilon_G = \frac{u_t}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_t}{l_0} \right)^2$ .

Y la variación se calcula como:  $\delta\varepsilon_G = \frac{\partial\varepsilon_G}{\partial u} \delta u = \left( 1 + \frac{u_t}{l_0} \right) \frac{1}{l_0} \delta u$

- Deformación Logarítmica Rotada:  $\delta\varepsilon_L = \frac{\delta l_t}{l_t}$ .

Con lo cual, la variación resulta:  $\delta\varepsilon_L = \frac{\partial l_t}{\partial u} \delta u \frac{1}{l_t} = \frac{1}{l_t} \delta u$ .

Y la deformación unitaria es,

$$\int_0^{\varepsilon_L} d\varepsilon_L = \int_{l_0}^{l_t} \frac{dl}{l}$$

$$\varepsilon_L = \ln \left( \frac{l_t}{l_0} \right) = \ln \left( 1 + \frac{u_t}{l_0} \right)$$

- 2) Las relaciones fuerza desplazamiento resultan de aplicar el PTV con las medidas de deformación halladas. Se utiliza el PTV planteado en la configuración de referencia (Ingenieril Rotada y Green) y en la deformada (Logarítmica Rotada).

$$\int_{V_0} \sigma \delta \varepsilon dV_0 = P \delta u \quad \text{y} \quad \int_{V_t} \sigma_L \delta \varepsilon_L dV_t = P \delta u$$

■ **Deformación Ingenieril Rotada:**

PTV en configuración de referencia:  $\sigma_E \delta \varepsilon_E A_0 l_0 = P_t \delta u$ .

Relación Constitutiva:  $\sigma_E = E \varepsilon_E$ .

Con lo cual,

$$P_t = EA_0 \frac{u_t}{l_0}$$

■ **Deformación de Green:**

PTV en configuración de referencia:  $\sigma_G \delta \varepsilon_G A_0 l_0 = P_t \delta u$ .

Relación Constitutiva:  $\sigma_G = E \varepsilon_G$ .

Con lo cual,

$$P_t = EA_0 \left(1 + \frac{u_t}{l_0}\right) \left[\frac{u_t}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_t}{l_0}\right)^2\right]$$

■ **Deformación Logarítmica Rotada:**

PTV en configuración de deformada (usando:  $A_t = A_0$ ):  $\sigma_L \delta \varepsilon_L A_t l_t = P_t \delta u$ .

Relación Constitutiva:  $\sigma_L = E \varepsilon_L$ .

Con lo cual,

$$P_t = EA_0 \ln \left(1 + \frac{u_t}{l_0}\right)$$

- 3) La curva sólida es lineal y por lo tanto corresponde a la deformación Ingenieril Rotada. La curva con punto y raya tiene un cero en:  $\frac{u_t}{l_0} = -1$  y por lo tanto corresponde a la deformación de Green. La curva con guiones corresponde a la deformación Logarítmica rotada (con hipótesis de área constante).

Las tres curvas coinciden para pequeñas deformaciones unitarias. Con lo cual, las soluciones de estructuras con estas medidas de deformación y ley material elástica lineal (módulo: E) son equivalentes siempre y cuando las deformaciones unitarias sean pequeñas.

Si se realiza un análisis usando barras basadas en deformación de Green y se obtienen grandes deformaciones unitarias de compresión, la estructura puede volverse inestable debido a la tangente horizontal que se observa en la gráfica para valores de  $\frac{u_t}{l_0}$  cercanos a  $-0,4$ . Esto hace a la deformación de Green con material elástico lineal especialmente inadecuado para deformaciones unitarias de compresión.