CUADERNO DE EJERCICIOS

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONTROL

Departamento de Control y Electrónica Industrial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Facultad de Ingeniería

Edición 2021

Contenido:

Hoja de ejercicios Nº0 : Fundamentos

1) Cálculo matricial: Multiplicación e inversión, valores y vectores propios.

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$

a) Calcule los valores propios de **A** y los vectores propios asociados.
b) Halle la matriz **P** tal que $\mathbf{D = P^{-1} A P}$ sea diagonal.

Usando MATLAB:
c) Resolver las partes a) y b). (Ver Cap. 2 de "Usando Matlab para resolver problemas de Control")

2) Transformada de Laplace

a) Determine la transformada de Laplace de las siguiente funciones:
i) $f(t) = \delta(t)$ ii) $f(t) = 7{,}8$ iii) $f(t) = 16e^{-8t}$ iv) $f(t) = 18t$
v) $f(t) = 120 \text{ sen } 25t$ vi) $f(t) = 3{,}2 \cos 1000t$ vii) $f(t) = 8t^2$

b) Determine la transformada de Laplace de las siguiente funciones:
i) $f(t) = 7{,}8 + 16e^{-8t}$ ii) $f(t) = 8.2te^{-2.5t}$ iii) $f(t) = 9e^{-3t} \text{ sen } 100t$ iv) $f(t) = 2 \text{ sen}(t-6)$
v) $f(t) = 5e^{-7t} \cos 50t$ vi) $f(t) = 45e^{-5(t-6)}$ vii) $f(t) = 4{,}8e^{-5t}\cos(400t-36º)$

c) Determine la transformada de Laplace de las siguiente expresiones:
i) $12 \int x(t)\, dt + 17x(t)$ ii) $8d^2x/dt^2 + 5dx/dt$, con $dx(0)/dt = 8$, $x(0) = -4$

d) Determine la función f(t) en el dominio del tiempo (anti-transformada de Laplace) de las siguientes funciones:
i) $F(s) = 345$ ii) $F(s) = 345/s$ iii) $F(s) = 6.7/s^2$
iv) $F(s) = 45/(s+72)$ v) $F(s) = 25\omega/(s^2 + \omega^2)$ vi) $F(s) = 28s/(s^2 + \omega^2)$

e) Determine la función f(t) en el dominio del tiempo (transformada inversa de Laplace) de las siguientes funciones:
i) $F(s) = 650/(s+8)^2$ ii) $F(s) = 250\omega/((s + 4)^2 + \omega^2)$
iii) $F(s) = 16(s+5)/((s + 5)^2+\omega^2)$ iv) $F(s) = 64\angle 48º/(s + 8 - j16) + 64\angle -48º/(s + 8 + j16)$

f) Complete la expansión en fracciones simples y encuentre la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones:
i) $F(s) = 82/s(5s + 1)$ ii) $F(s) = 4(s + 5)(s + 7)/s(s + 3)(s + 6)$
iii) $F(s) = 2(s + 5)/(s + 1)^2$ iv) $F(s) = (s + 2)/(s^2 + 2s + 4)$

3) Ecuaciones diferenciales

Resuelva aplicando transformada de Laplace las siguientes ecuaciones diferenciales para la(s) entrada(s) y la(s) condicion(es) inicial(es) especificadas:

	Ecuación diferencial	Entrada(s)	Cond. inciales
a)	$\begin{cases} x_1' + 5.x_1 = F \\ 2.(x_2' - x_1') + 5(x_2 - x_1) = F \end{cases}$	$F = 2\ N \quad t \geq 0$	reposo con $F = 0$
b)	$0{,}5.V_o'' + 0{,}6.V_o' + 2{,}1.V_o = 3.V_i + 2$	$V_i = 5\ V \quad t \geq 0$	$V_o = 0\,;\ \ V_o' = 0$

4) Respuesta en frecuencia: Diagramas de Bode

Sean las siguientes funciones de transferencia:

F(s) = K/(Ts + 1); G(s) = $w_n^2/(s^2 + 2z\, w_n s + w_n^2)$; H(s) = 10s/((s+1)(s+10))

a) Trazar los diagramas de Bode asintóticos y reales.

b) Para un sistema cuya función de transferencia tiene la forma de F(s) con K = 1 y T = 1, calcular la salida en régimen del sistema (en forma aproximada y exacta) para las entradas

- u(t) = 10 sen(t)
- u(t) = 5 sen(10t + π/2)
- u(t) = 2sen(t) + 10sen(10t + π)

5) Respuesta en frecuencia: Diagramas de Nyquist

Sea H(s) la función de transferencia en lazo abierto de un sistema. H(s) = K/(s(s+1)(s+10))

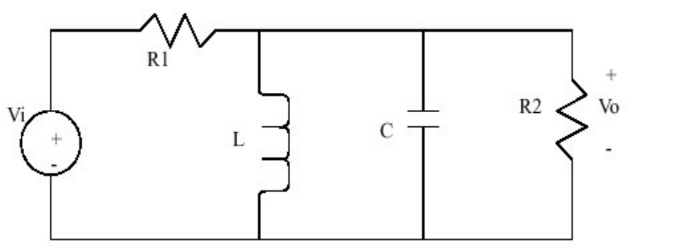
a) Trazar el diagrama de Nyquist.

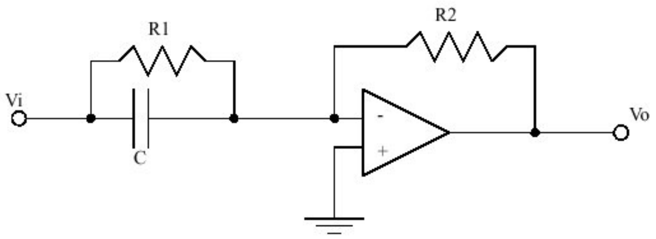
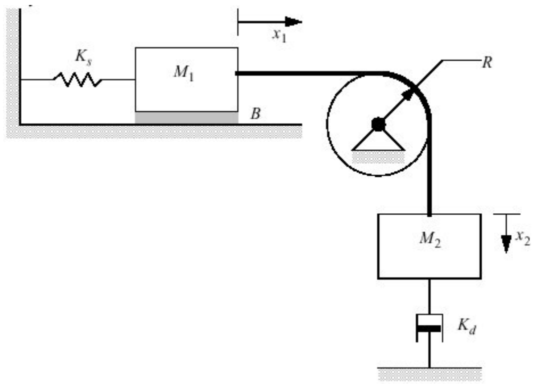
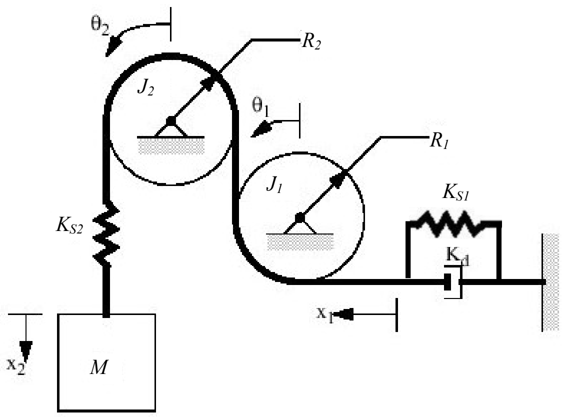
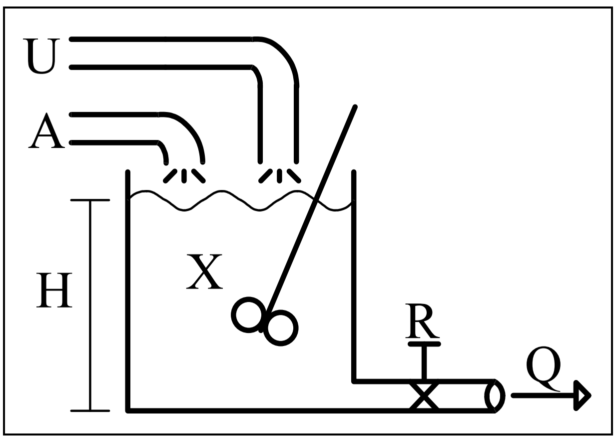
b) Determinar el rango de valores de K (>0) para el cual el sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria negativa es estable.

Repetir lo anterior para G(s) = K.10.s/(s+1)(s+10)

6) Modelado

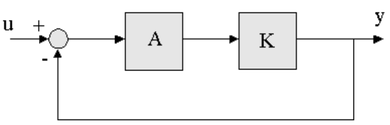
Escriba las ecuaciones diferenciales que modelan los siguientes sistemas:

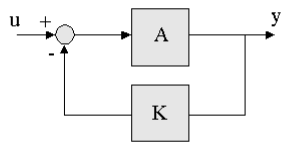
a)		Vi : fuente de alimentación variable. Vo (tensión en bornes de la resistencia R2) es la variable de salida.

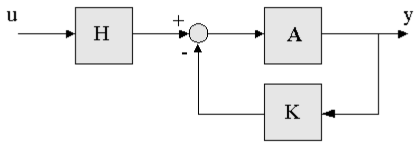
b)		El amplificador operacional puede considerarse ideal.
c)		Ks : cte. elástica del resorte Kd : cte. dinámica del amortiguador R : radio de la polea B : coef. de fricción viscosa J : Momento de inercia de la polea respecto al eje de giro Mi : masa del cuerpo i Xi : desplazamiento del cuerpo i, . referido a su posición de equilibrio.
d)		Ks_1, Ks_2 : cte. elástica de los resortes Kd : cte. dinámica del amortiguador Ri : radio de la polea i Bi : coef. de fricción viscosa de la polea i con sus cojinetes Ji : Momento de inercia de la polea i, respecto al eje de giro M : masa del cuerpo Xi : desplazamiento del cuerpo i, referido a su posición de equilibrio. θi : desplazamiento angular de la polea i, referido a su posición de equilibrio.
e)		Mezcla de dos componentes líquidos, en un tanque de sección uniforme S. Los caudales de alimentación (m^3/s) de los líquidos 1 y 2 son A y U respectivamente, y el caudal de salida de la mezcla es Q. Se considera que: • Se puede suponer la concentración X (volumen del líquido 1 / volumen de la mezcla) homogénea en el tanque. • Hay conservación de volumen en la mezcla • Las densidades de ambos líquidos se suponen iguales • flujo turbulento en el cual se cumple que $Q = K.\sqrt{H}$, con K constante.

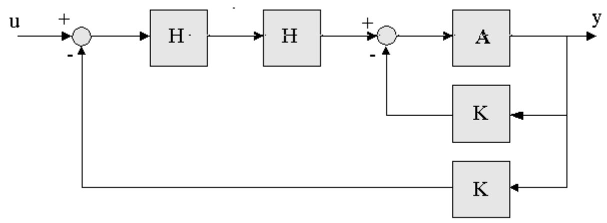
Hoja de ejercicios Nº1 : Diagrama de Bloques y Clasificación de Sistemas

1) Calcule la transferencia **G** entre la señal de entrada **U** y la de salida **Y**, de los siguientes sistemas, donde **A**, **H** y **K** representan las funciones de transferencia de los bloques componentes:

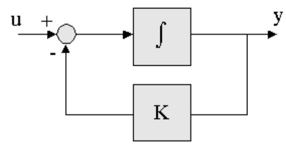
a) 

b) 

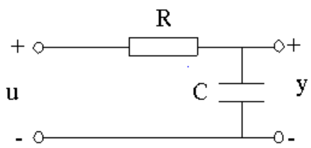
c) 

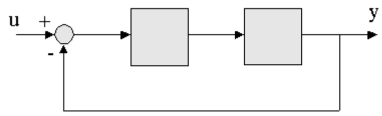
d) 

2) Escriba la ecuación diferencial que representa el diagrama de la figura (**K** = cte).



3) Represente el siguiente sistema con un diagrama de bloques con la estructura que se indica.





4) Represente la siguiente ecuación diferencial mediante un diagrama de bloques que contenga sólo bloques constantes, integradores y sumadores. Las señales y(t) y u(t) representan, las señales de salida y entrada al sistema, respectivamente.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

5) Represente la siguiente ecuación diferencial, de entrada u(t) y salida y(t),

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

usando los mismos tipos de bloques del ejercicio anterior.
Analice los diferentes casos que surgen en relación a si es **m** es mayor, igual, o menor que **n**.

6) Causalidad. Sean **u(t)** e **y(t)** las funciones de entrada y salida de un sistema respectivamente, y sea la relación entre ellas:

$$y(t) = \frac{e^{u(t-a)}}{t-b}$$

Indique para qué valores de **a** y **b** el sistema es causal.

7) Causalidad y determinismo. Sean **u(t)** e **y(t)** las funciones de entrada y salida de un sistema respectivamente, y sea **R{.}** la relación entre ellas. Si el sistema es causal y determinista y se cumple que

$$\mathbf{y_{1[tc,\,+\infty)} = R\{u_{1[tc,\,+\infty)}\}}$$
$$\mathbf{y_{2[tc,\,+\infty)} = R\{u_{2[tc,\,+\infty)}\}}$$

donde $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son dos entradas cualesquiera, indique si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si para algún $\mathbf{t_1 > t_c}$ se cumple que $\mathbf{u_1(t_1) = u_2(t_1)}$, entonces $\mathbf{y_1(t_1) = y_2(t_1)}$

b) Si $\mathbf{u_{1[tc,t1)} = u_{2[tc,t1)}}$, entonces $y_1\left(\frac{t_c+t_1}{2}\right) = y_2\left(\frac{t_c+t_1}{2}\right)$

c) Si $\mathbf{u_{1[tc,+\infty)} = u_{2[tc,+\infty)}}$, entonces $\mathbf{R\{u_{1[tc,+\infty)} - u_{2[tc,+\infty)}\} = 0}$

d) Si $\mathbf{u_{1[tc,+\infty)} = u_{2[tc,+\infty)}}$, entonces $\mathbf{R\{u_{1[tc,+\infty)}\} - R\{u_{2[tc,+\infty)}\} = 0}$

e) Si $\mathbf{u_{1[tc,t1)} = u_{2[tc,t1)}}$ para $\mathbf{t_c<t_o<t_1}$, entonces $\mathbf{y_{1[to,t1)} = y_{2[to,t1)}}$

8) Determinismo. Un sistema tiene como relación entrada-salida (**u(t)** entrada; **y(t)** salida) a:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

Indique si el sistema es determinista o no determinista.

9) Causalidad. Sea **U** el conjunto de entradas de un sistema, formado por todas las funciones continuas; sea **Y** el conjunto de todas las salidas. Si la relación entrada-salida está dada por:

$$\mathbf{y(t) = u(t+1), \qquad t\ \varepsilon\ [t_c\,,\ +\infty)}$$

indique si el sistema es causal.
Si el conjunto **U** estuviese formado sólo por las funciones constantes **U = { u: T -> R : u(t) = k }** donde **k** es un número real, y la relación entrada-salida fuese la misma que arriba, ¿sería el sistema causal?

10) En cada uno de los siguientes casos indique si el sistema descrito por la relación entrada-salida dada es algebraico, autómata finito o infinito, de parámetros concentrados o de parámetros distribuidos:

$$a)\quad y(t) = \int_0^t \left[sen^2(u(\sigma)) + \cos^2(u(\sigma))\right] d\sigma$$
$$b)\quad y(t) = \max(u(\sigma)) - \min(u(\sigma)) \quad donde\ t_c \le \sigma \le t$$
$$c)\quad y(t) = \int_0^t \left[signo(u(\sigma))\right] d\sigma$$
$$d)\quad y(t) = u(t) + 2.u^2(t)$$

En todos los casos $\mathbf{t\ \varepsilon\ [t_c,\ +\infty) \subset R,\ u: R \rightarrow R}$

Hoja de ejercicios Nº2 : Modelado - Variables de Estado y Sensibilidad

1) El amplificador operacional del circuito de la **figura 1a** es semi-ideal, es decir:

- Impedancia de entrada infinita.
- Impedancia de salida nula.
- Ganancia en tensión finita **A.**

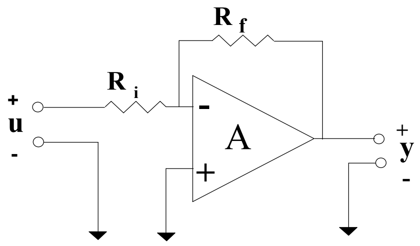


Figura 1a

a) Demostrar que la ganancia en tensión del sistema realimentado es:

$$G = \frac{y}{u} = -A\,\frac{R_f}{R_i}\cdot\frac{1}{\dfrac{R_f}{R_i}+A+1}$$

b) Para estudiar el mecanismo de la realimentación se puede descomponer el circuito en dos partes cuyos diagramas de bloques se indican (**figuras 1b y 1c**). Aplíquese el resultado de la parte c) del problema 1 de la hoja 1, para obtener la ganancia del sistema realimentado. Verificar que el resultado coincide con el de la parte a).

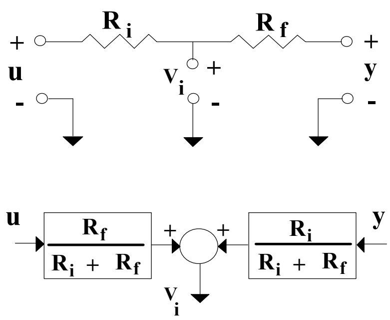


Figura 1b

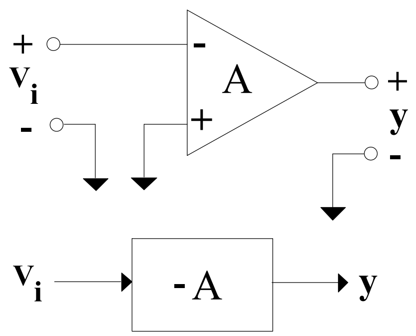


Figura 1c

c) Calcular la sensibilidad de **G** con respecto a **A**, $\mathbf{G_a}$, si se cumple que **A >> Rf / Ri >> 1**.
¿Qué diferencias se encuentran en la ganancia y en la sensibilidad a cambios en **A** con y sin la realimentación?

d) Calcule **G** y $\mathbf{G_a}$ para los valores numéricos:

Ri = 1 kΩ
Rf = 100 kΩ
A = 10000

e) Calcule la variación de **G** si **A** varía en un 20 %

2) Se considera el circuito de la **figura 2a**. Se supone que para el tipo de señales manejadas, y con **U(t)** acotado entre 1 V y Vcc, se puede representar al transistor por su modelo híbrido (**fig 2b**).

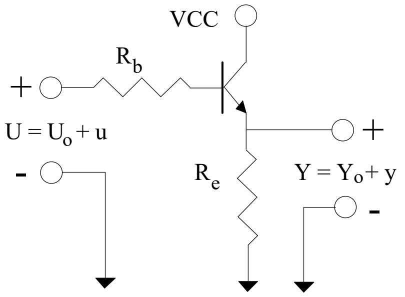


Figura 2a

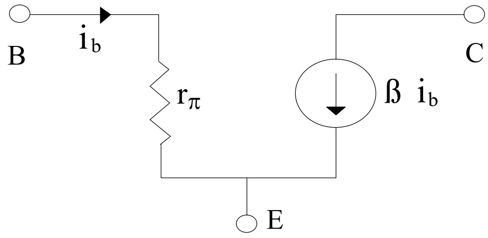


Figura 2b

a) Calcule la ganancia del sistema **G = y/u**.
b) Represente el sistema mediante un diagrama de bloques como el de la **figura 2c** calculando α.

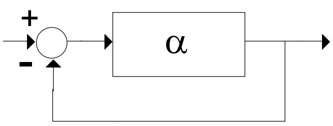


Figura 2c

c) Calcule la sensibilidad de **G** respecto a cambios en **ß** (posiblemente debidos a variaciones de temperatura) y de **Re** (posiblemente debidas a cargas acopladas en la salida).
d) Si **(ß+1) Re / (r_π + Rb) >> 1**, ¿se obtiene alguna ventaja de este circuito realimentado? (Considerar variaciones posibles de **ß**, **Re** y r_π).

3) Se considera un motor de corriente continua con excitación independiente constante **i** y cargado según la **figura 3** siendo ***Cm(t)*** el par de carga, **J** el momento de inercia complexiva según el eje de giro, **b** el coeficiente de fricción viscosa en el eje, **E** la diferencia de potencial eléctrico aplicado en los bornes accesibles del motor, **R** la resistencia y **L** la inductancia eléctricas del bobinado de armadura.

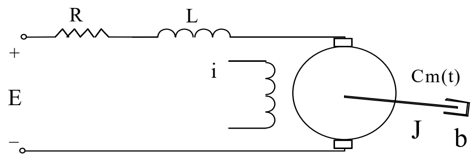


Figura 3

Hallar una representación en variables de estado del sistema.

4) Se consideran dos máquinas de continua conectadas según la **figura 4**, con la misma notación que el ejercicio anterior.

a) Hallar las ecuaciones de estado del sistema eligiendo variables de estado energéticas.

b) Dibujar el diagrama de bloques del mismo.

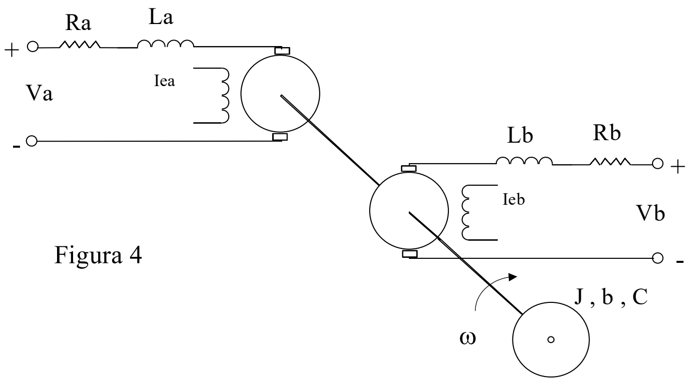


Figura 4

5) Considere el filtro de la **figura 5**, definiendo:

u : entrada **y** : salida $\mathbf{x = [v_1\ v_2\ i_1\ i_2]^t}$: estados

Condiciones iniciales nulas.

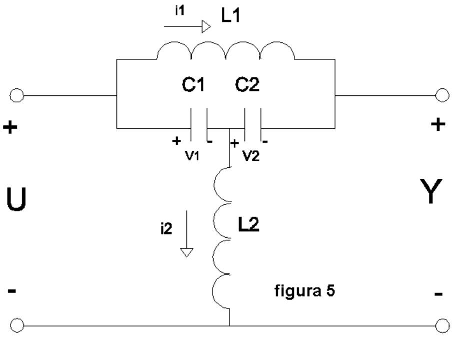


figura 5

a) Modele el circuito con un sistema de la forma:

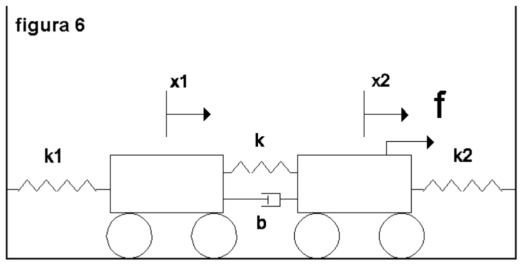
$$\dot{x} = A.x + B.u$$
$$y = C.x + D.u$$

b) Construya un diagrama de bloques para el sistema donde aparezcan explícitamente las variables $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$ (estado del sistema).

c) Calcule la función de transferencia de este sistema.

6) Dado el mecanismo de la **figura 6**, con dos carritos, tres resortes y un amortiguador de pistón, se considera su movimiento alrededor de la posición de reposo con el carro de masa $\mathbf{M_2}$ sometido a una fuerza variable **f(t)**.

figura 6



a) Modele el mecanismo con un sistema de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x + D.u \end{cases}$$

$$donde \quad u = f(t), \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^t, \quad y = x$$

b) Deduzca la matriz de transferencia **H(s)** para condiciones iniciales nulas.

7*) Se considera el sistema de accionamiento electro-hidráulico de la **figura 7** compuesto por un comando eléctrico que controla el gasto volumétrico (Q) que alimenta un pistón de doble efecto de longitud **2L** y sección **A**.

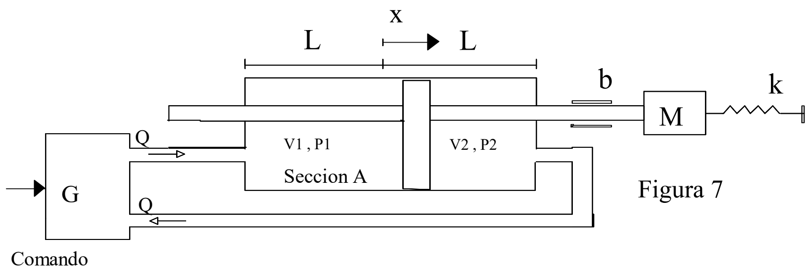


Figura 7

a) Si el sistema hidráulico cumple la ecuación donde tenemos:

$$Q = G \cdot u = \frac{dV_1}{dt} + \frac{V}{2E} \cdot \frac{dP}{dt}$$

Q	Gasto volumétrico
$\mathbf{V_1}$	Volumen del lado 1
V	Volumen total del pistón (V1 + V2)
E	Coeficiente de compresibilidad del fluido
P	Presión diferencial entre el lado 1 y el lado 2

Plantear las ecuaciones de estado del sistema, tomando como variables de estado: $\mathbf{x_1 = F}$, $\mathbf{x_2 = dx/dt}$ y $\mathbf{x_3 = x}$ (**F** esfuerzo aplicado por el pistón sobre la barra).

b) Plantear el diagrama de bloques y hallar la transferencia entre **u** y **F**.

Hoja de ejercicios Nº3 : Modelado - Variables de Estado y Condiciones iniciales

1) Se considera un pequeño sistema físico constituido por dos tanques de agua, de secciones constantes $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, superiormente abiertos a la atmósfera. Los tanques se conectan como se muestra en la figura. Las válvulas ofrecen resistencias hidráulicas constantes $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$.

Denominamos:

u : Gasto de entrada.

$\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$: Presiones instantáneas en las bases de los tanques, referidas a la presión atmosférica.

$\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$: Gastos instantáneos en las cañerías.

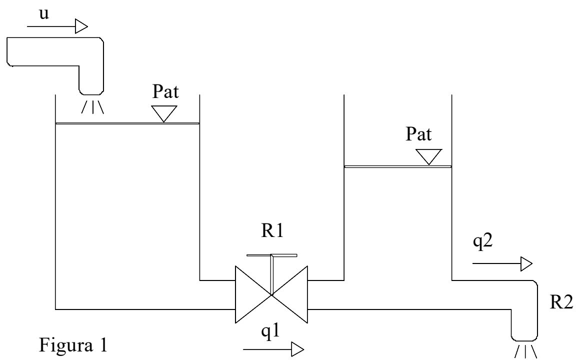


Figura 1

Se pide:

a) Obtener un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias y a coeficientes constantes) que describa la evolución del sistema en función de $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$ y las condiciones iniciales $\mathbf{p_1(0)}$ y $\mathbf{p_2(0)}$.

b) i) Dibuje un diagrama de bloques para el sistema de la figura, cuando las condiciones iniciales son nulas, considerando como entrada **u(t)** y como salida $\mathbf{y(t) = q_2}$.

ii) Ídem cuando las condiciones iniciales $\mathbf{p_1(0)}$ y $\mathbf{p_2(0)}$ no son nulas. Observe que se puede considerar un vector de entradas $\mathbf{e = [u\ p_1(o)\ p_2(o)]}$ donde $\mathbf{p_1(o)}$ y $\mathbf{p_2(o)}$ son constantes.

c) i) Dados $\mathbf{x(t) = [p_1\ p_2]^t}$ vector de estados, $\mathbf{y(t) = q_2}$ salida, representar el sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + B.u \\ y &= C.x + D.u \end{aligned}$$

hallando las matrices **A**,**B**,**C**,**D**.

ii) El diagrama de bloques asociado a esta forma es el de la parte b.i) (note que difiere ligeramente del de la parte b.ii). ¿Podría explicar la diferencia? ¿Existe alguna similitud al hecho de resolver problemas de circuitos con transformadas de Laplace agregando fuentes en lugar de condiciones iniciales?

2) El sistema de la figura se utiliza para elevar "a baño maría" la temperatura de un líquido. El calentamiento se produce haciendo circular el líquido a calentar (1) dentro de un recipiente sumergido en un baño caliente (2). $\mathbf{q_1}$ es el caudal a ser calentado y $\mathbf{T1_i}$ es su temperatura inicial. $\mathbf{q_2}$ es el caudal de líquido calefactor que entra al recipiente exterior y $\mathbf{T2_i}$ su temperatura de entrada. Los niveles de ambos recipientes se mantienen constantes. Hallar una representación en espacio de estados del sistema térmico de la figura.

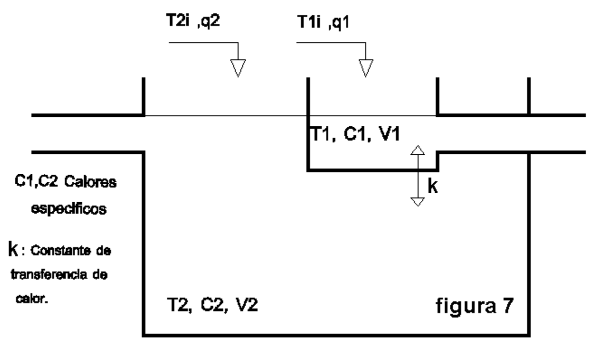


figura 7

Se supondrá que:
- la masa metálica del recipiente interno es pequeña y su capacidad térmica despreciable.
- la pérdida de calor del recipiente externo es despreciable.
- la pérdida de calor de la superficie libre es despreciable.
- las temperaturas de los líquidos son homogéneas.

3) Verifique que el diagrama de bloques de la **figura 3** corresponde a un sistema lineal cuya dinámica viene dada por:

$$\dot{x} = A.x + B.u$$
$$y = C.x + D.u$$

y la condición inicial $x(t_0)=0$.

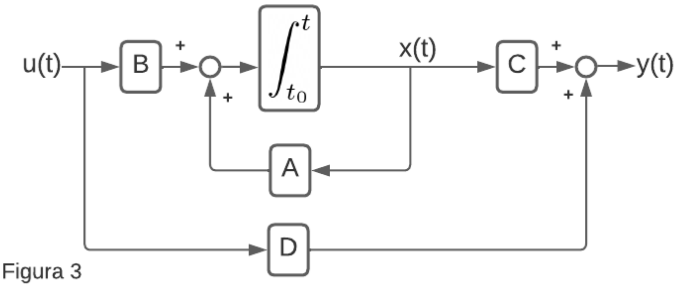


Figura 3

4) **a)** Verifique que el diagrama de bloques de la **figura 4** corresponde a un sistema lineal cuya dinámica viene dada por:

$$\dot{x} = A.x + B.u$$
$$y = C.x + D.u$$

y la condición inicial $\mathbf{x(t_0) = x_0}$.

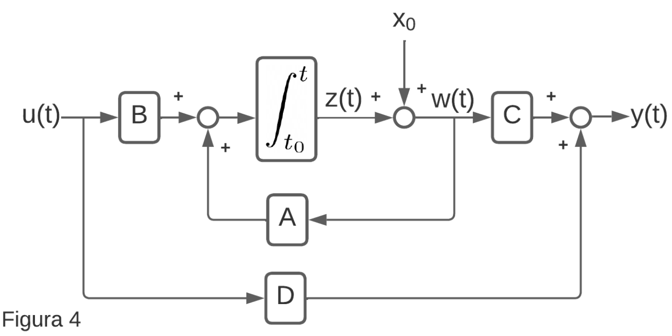


Figura 4

En ese caso, ¿qué representan los vectores **z(t)**, **dz(t)/dt** y w(**t**)?

Supóngase $\mathbf{z(t_0)=0}$. Obsérvese como se puede representar un sistema dinámico con condiciones iniciales nulas y una entrada adicional que representa la condición inicial.

b) Calcule la matriz de transferencia.

5*) El sistema de la **figura 5** está constituido por un carrito de masa **M** sobre el que pivota una barra de masa **m**, que actúa como péndulo invertido.

Se puede ver que en unidades adimensionadas apropiadas, el sistema puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones no lineales, que linealizadas para **θ** pequeño dan lugar a:

$$\ddot{\theta} = \theta + u \qquad \text{donde} \quad a = \frac{3}{4}.\frac{m}{m+M}$$
$$\ddot{z} = -a.\theta - u$$

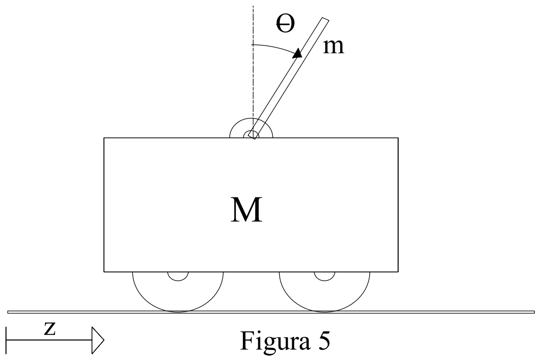


Figura 5

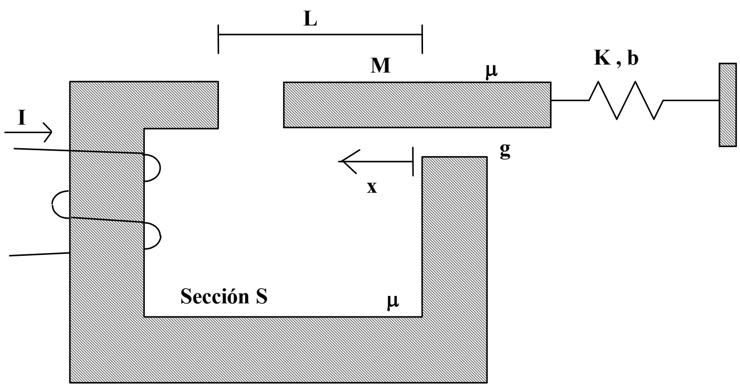
donde **u** es la fuerza debida al par que un motor eléctrico ejerce sobre las ruedas.

a) Realice un diagrama de bloques del sistema.

b) Se considera como estado al vector **x** = **[z,dz/dt,θ,dθ/dt]^t**, y salida al vector **y** = **[z,θ]^t**. Encuentre las ecuaciones de la descripción en variables de estado.

Hoja de ejercicios Nº4 : Modelado - Linealización

1) Se considera el sistema posicionador de la **figura**. Consiste en una barra de material ferromagnético (hierro) que se puede desplazar horizontalmente sometida a la acción de una fuerza magnética, un resorte de constante **K** y un amortiguador de constante **b**. La corriente **I** circula por las **N** espiras de la bobina arrollada en torno al núcleo.



Hipótesis:
- Se considera que para el hierro $\mu = \infty$ y que no hay flujo de fugas.
- Para el aire, la curva B(H) es lineal
- El resorte tiene longitud natural **d**. (**x** = **d** para **I** = 0).
- La sección del hierro es constante de valor **S** y el gap entre el hierro y la barra móvil vale **g**.

a) Encontrar las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema.

b) Linealizar el sistema en torno del punto de equilibrio $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{I_0}$.

2) Se considera un satélite en órbita alrededor de la tierra. La posición instantánea está descrita en coordenadas polares respecto al centro de la tierra, el eje de la tierra orientado de Sur a Norte y un punto fijo del plano ecuatorial.
***x*(t)**, integrado por sus coordenadas y velocidades polares representa el estado del sistema en el instante **t**: $x = (\, r\ \dot{r}\ \theta\ \dot{\theta}\ \varphi\ \dot{\varphi}\,)^t$
Considere el vector ***u*(t)** de entradas, que representan las fuerzas (en coordenadas polares) que los motores de corrección de trayectoria ejercen en las direcciones polares: $V = (\, u_r\ u_\theta\ u_\varphi\,)^t$
La salida del sistema es la posición instantánea: $y = (\, r\ \theta\ \varphi)^t$

El sistema viene descrito por: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = C.x \end{cases}$, donde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r.\dot{\theta}^2 + r.sen^2\theta.\dot{\varphi}^2 - \dfrac{k}{r^2} + \dfrac{u_R}{m} \\ \dot{\theta} \\ -\dfrac{2.\dot{r}.\dot{\theta}}{r} + sen\theta.\cos\theta.\dot{\varphi}^2 + \dfrac{u_\theta}{m.r} \\ \dot{\varphi} \\ -\dfrac{2.\dot{r}.\dot{\varphi}}{r} - \dfrac{2.\cos\theta}{sen\theta}.\dot{\theta}.\dot{\varphi} + \dfrac{u_\varphi}{m.r.sen\theta} \end{bmatrix}$$

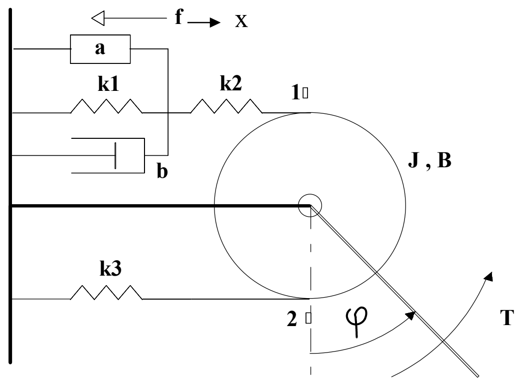
El satélite se encuentra en órbita ecuatorial geostacionaria es decir:

$$x_o(t) = [\ r_o\ \ 0\ \ \pi/2\ \ 0\ \ \omega_o t\ \ \omega_o\ ],\ \ u_o(t) = 0,\ \ r_o^3.\omega_o^2 = k \text{ (cte.)}$$

Se consideran pequeñas perturbaciones alrededor de dicha órbita. Obtenga un modelo lineal para representar esas perturbaciones, del tipo: $\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x \end{cases}$

3) Se considera el brazo mecánico de la figura que trabaja en forma horizontal. El movimiento del mismo está limitado por los topes **1** y **2** correspondiendo a un rango $\mathbf{0} < \boldsymbol{\varphi} < \boldsymbol{\pi}$.

Los puntos de unión entre los resortes y el disco están hechos mediante hilos flexibles e inextensibles, de manera que los esfuerzos sobre el disco, transmitidos por los hilos, son siempre tangentes frente a cada tope. Se considera que para todo el rango de variación de $\boldsymbol{\varphi}$ la fuerza en los hilos es de tracción.
El sistema está construido de forma tal que con $\mathbf{T = 0}$ y $\mathbf{f = 0}$, el brazo está equilibrado en $\mathbf{x = 0}$ y $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$, cumpliéndose $\mathbf{k_3 = k_1.k_2/(k_1+k_2)}$.
Se considera despreciable la masa de los resortes y de la varilla.
El bloque A es un actuador que aplica una fuerza **f** al sistema, comandada eléctricamente por un voltaje **V**. La función de transferencia de este subsistema es una constante **a**.



Visto desde arriba

a) Plantear las ecuaciones de estado del brazo mecánico, considerando $\boldsymbol{\varphi}$ como variable de salida y tomando como vector de estados:

$$\begin{bmatrix} x, & \varphi, & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^t$$

b) En adelante se considera el ejemplo numérico siguiente:
$K_1 = K_2 = 0{,}166$ N/cm; $b = 0{,}1$ N.s/cm; $r = 5$ cm; $a = 1$ N/V
$J = 2{,}293$ N.cm.s^2/rad; $B = 1{,}605$ N.cm.s/rad; $T = 0$ N.cm
Hallar la función de transferencia entre **V** y $\boldsymbol{\varphi}$.

c) Estando el brazo posicionado en $\boldsymbol{\varphi = \pi/2}$, $\mathbf{d\varphi/dt = 0}$, con $\mathbf{x = 0}$, se aplica un escalón en el voltaje de **2 V**. Hallar la respuesta del brazo $\boldsymbol{\varphi(t)}$.

Usando MATLAB (Ver Cap. 3 de "Usando MatLab para resolver problemas de Control"):

d) Ingresar el modelo matricial en un programa y obtener la función de transferencia a partir del mismo.

e) En las condiciones de la parte c):
- e1) Obtener y graficar la evolución temporal de todos los estados.
- e2) Ingresar la expresión analítica de $\boldsymbol{\varphi(t)}$ hallada en la parte c) y evaluarla con el mismo vector de tiempos usado en la parte e1). Comparar con resolución en MATLAB.

Hoja de ejercicios Nº5 : Matriz de transición de estados

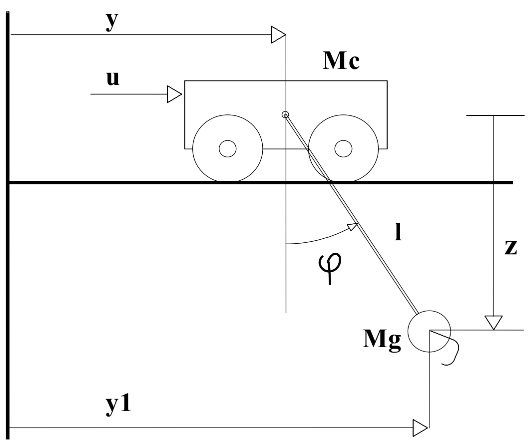
1) Sean las matrices A, P y D del ejercicio 1 de la hoja 0.
a) Calcule $\mathbf{e^{Dt}}$ y $\mathbf{e^{At}}$.
b) Repita el cálculo por el método de la transformada de Laplace.

2) Calcule $\mathbf{e^{At}}$ para los siguientes valores de A:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: usar diferentes métodos (Laplace, Cayley-Hamilton).

3*) El dispositivo de la figura es una grúa móvil, consistente de un carro que se mueve sobre rieles horizontales, del que cuelga un gancho a través de una barra articulada de longitud **l**. Se despreciará la masa de esta barra.



a) Encuentre una representación en variables de estado para este sistema, lineal, para pequeños ángulos de apartamiento de la vertical.
Considere como estado

$$x = \left[y, \quad \dot{y}, \quad \varphi, \quad \dot{\varphi}\right]^t$$

y la entrada es la fuerza **u**.

b) Dibuje un diagrama de bloques para esta representación.

c) Considere el subsistema del gancho, es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + B_1 u$$

Calcule la matriz de transición de este subsistema $\mathbf{e^{A1t}}$.

4*) Para el subsistema del problema anterior, halle la respuesta temporal a una entrada en escalón: $\mathbf{u(t) = f_0.Y(t)}$.
Haga lo mismo para una entrada sinusoidal $\mathbf{u(t) = f_0.sen(wt)}$.
(Siempre para pequeños desplazamientos).

5) Un cierto proceso químico se realiza en el interior de un reactor continuo, agitado, ideal, de volumen **V**. En este tipo de reactores se toma como hipótesis de trabajo que las condiciones físico-químicas en su interior son homogéneas. Los caudales de entrada y de salida al reactor se consideran constantes e iguales a **Q**.
La reacción que se considera es irreversible, de primer orden y su velocidad es proporcional a la concentración de reactivo en el interior del reactor ($\mathbf{C_r}$), es decir:

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} = K.C_r = -\frac{\partial C_r}{\partial t}$$

donde $\mathbf{C_p}$ es la concentración del producto en el interior del reactor.

a) Tomando como entrada la concentración de reactivo en el caudal de entrada $\mathbf{C_{ri}}$ y como salida la concentración de producto en el caudal de salida $\mathbf{C_p}$ halle una representación en variables de estado para este sistema.

b) Halle la respuesta del sistema a un impulso en la entrada.

c) Considerando que aplicamos al sistema una entrada del tipo:

$$C_{ri}(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \le 0 \\ 0, & 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Calcular $\mathbf{C_r(t)}$ y $\mathbf{C_p(t)}$ para $\mathbf{t > 0}$.

Hoja de ejercicios Nº6 : Respuesta temporal

1) Dado el sistema de la figura, determinar los valores de **k > k$_h$** de modo que:

Caso 1) La relación de amortiguación de los polos dominantes sea **ξ = 0,5**.

Caso 2) La constante de aceleración **Ka = 50 *seg*$^{-2}$**

Para que valores de **k**, ambos polos tienen parte real menor que -10?

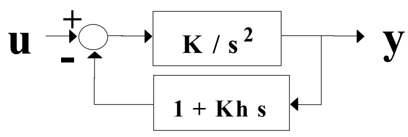
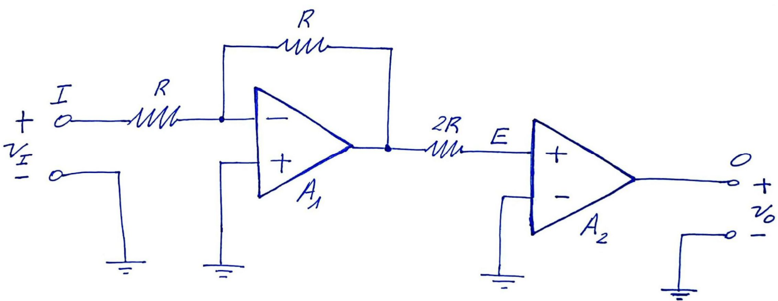


Figura 6.1

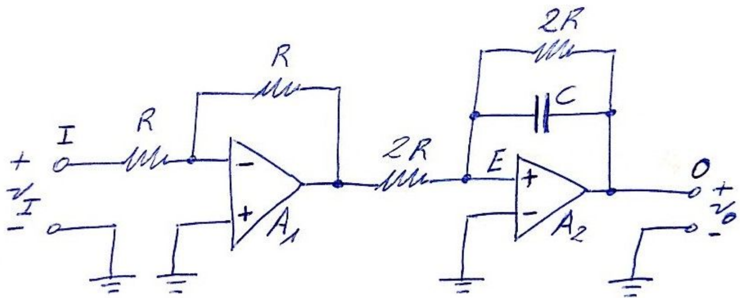
2) Considerar el siguiente circuito, donde R = 500 kΩ.



	A$_1$	A$_2$
Imp. de entrada	∞	R
Imp. de salida	0	0
Ganancia	∞	-K/s^2

a) Realimentando entre **O** y **E** con **2R**, hallar **K** para que la frecuencia natural sea 0,707 rad/seg.

b) Realimentando con **(2R)||C** entre **O** y **E**, como se muestra a continuación donde C = 2 μF, calcular la ganancia de lazo cerrado y la nueva frecuencia natural.

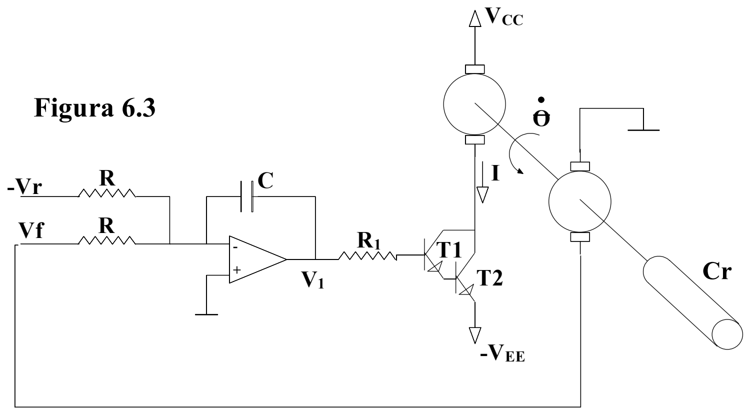


c) Calcular para el sistema resultante en b) el error de régimen permanente para una entrada: **v_I** (volt) = **2t^2** (t en seg.).

3) Este ejercicio es solamente para quienes conocen los diferentes modos de operación del transistor de unión bipolar y en particular el modelo pi de pequeña señal para su operación en zona activa.

Dado el sistema de la figura 6.3 se pide:

Figura 6.3



a) Hallar el punto de operación para **V$_r$ = 10 V**. En particular, calcular la velocidad de giro en **n** (en rpm).

b) Encontrar la función de transferencia $\mathbf{n(s)/V_r(s)}$ para el punto de operación anterior.

c) Analizar la variación de la respuesta temporal a una entrada en escalón $\mathbf{V_r = V/s}$ en función de $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{RC}$.

d) Determinar $\boldsymbol{\tau}$ de modo que el rebase sea del 20%. Para el valor de $\boldsymbol{\tau}$ hallado determinar el tiempo de establecimiento.

e) Si $\mathbf{V_r = 15\ V}$, calcular en régimen: **n**, **I** y **V1**. Se supondrá el transistor **T1** saturado, lo que se deberá verificar posteriormente.

DATOS:
$V_{CC} = 12$ V; $V_{EE} = 2\ V_{BE}$; $R_1 = 1$ KΩ; R = 1 MΩ; V1 puede variar entre + 15 V y -15 V
T1 = T2 : ß = 20; $V_{BE} = 0{,}6$ V; $V_{CE_{sat}} = 0{,}3$ V
(M): Motor de corriente continua y excitación independiente
Ra = 2 Ω; Fem de vacío: $E = A\Phi(d\Theta/dt)$
Par motor: $Cm = A\Phi I$; $A\Phi = 0{,}05$
(T): Tacómetro. $V_f = K_f(d\Theta/dt)$; $K_f = 0.1$
Inercia complexiva del sistema: $J = 2 \times 10^{-4}$ Kgm^2
Par resistente: $C_r = b(d\Theta/dt)$; $b = 0{,}001$; $n = (30/\pi)(d\Theta/dt)$

4*) La figura 6.4a muestra el diagrama esquemático de un sistema de control de posición de un satélite. Pequeños chorros aplican fuerzas de reacción para que gire el cuerpo del satélite a la posición deseada.
Cada uno de los chorros ejerce sobre el cohete un empuje **F/2**. Como se enciende siempre una pareja de chorros (A-C, B-D) el efecto neto es un par de valor **F.l**.
El momento de inercia alrededor del centro de masas es **J**.
Suponga que el control de posición es del tipo proporcional y derivativo, la representación en diagrama de bloques del sistema aparece en la figura 6.4b.

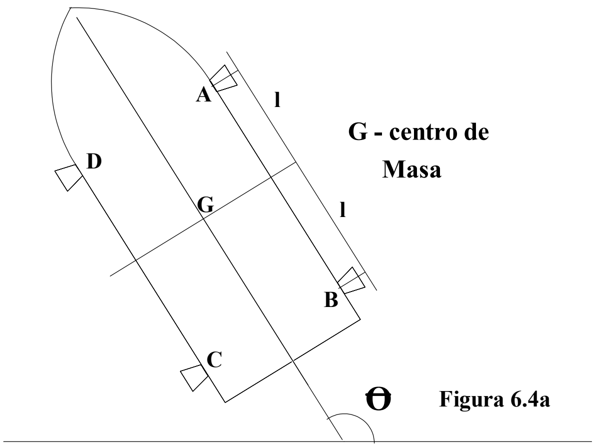


Figura 6.4a

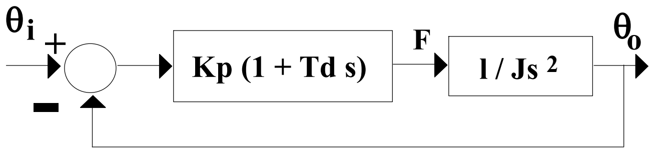


Figura 6.4b

Determine el valor del tiempo derivativo de modo que el valor de la relación de amortiguamiento sea $\boldsymbol{\xi = 0{,}7}$.

5) El sistema de la figura 6.5 representa un controlador de nivel de líquido. Se desea que el nivel **n** siga a un valor de referencia $\mathbf{n_c}$, fijado a través de un potenciómetro, aún ante variaciones del caudal de fuga $\mathbf{q_f}$.

Para esto, se propone un esquema que consiste en aplicar una tensión de error $\mathbf{v_c\text{-}v_n}$, amplificada por $\mathbf{A_1}$, a un servomecanismo de posición de la válvula. Este servomecanismo consta de un amplificador $\mathbf{A_2}$, que alimenta el inducido de un motor de corriente continua de excitación constante. La rotación del eje del motor acciona el eje de la válvula por medio de un reductor, permitiendo el ajuste del caudal de entrada $\mathbf{q_e}$.

La posición de la válvula es medida a través de un potenciómetro montado sobre el eje del motor.

DATOS:

. recipiente: n máx = 0,5 m;
sección S = 0,5 m^2

. captor de nivel: $v_n = f.n$; $f = 20$ V/m

. potenciómetro de referencia graduado de 0 a n máx; $v_c = f.n_c$

. amplificadores: A_1 y A_2 de ganancia regulables; $Z_{in} = \infty$; $Z_{out} = 0$; ancho de banda infinito.

. (M): motor de corriente continua con

$$\frac{\theta_m(s)}{e(s)} = \frac{K_m}{s.(1+T_m.s)}$$

$K_m = 0{,}5$ rad/V.s; $T_m = 0{,}1$ s

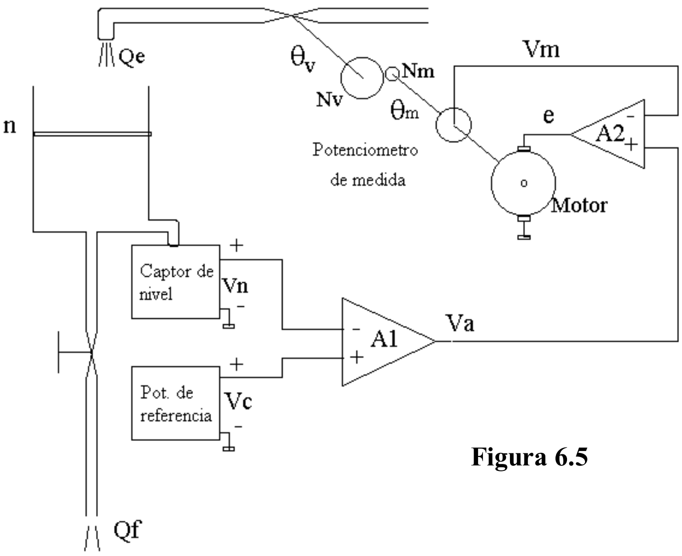


Figura 6.5

. potenciómetro P_m: captor de posición angular del eje del motor; $v_m = K_p.\theta_m$; $K_p = 1$ volt/rad

. reductor: $N_v/N_m = 20$ (relación de dientes)

. válvula: $q_e = k_v.\theta_V$; $k_v = 0{,}1$ m^3/s.rad

a) Hallar representación matricial del sistema en variables de estado y dibujar diagrama de bloques del servomecanismo completo.

b) Hallar la transferencia del servomecanismo de la válvula $\mathbf{\theta_m/v_a}$ y la función de transferencia en bucle abierto sin tener en cuenta la realimentación de nivel.

c) Calcular $\mathbf{A_2}$ para que la respuesta de $\mathbf{\theta_m}$ a un escalón en $\mathbf{v_a}$ presente un sobrepulso máximo de 0,0388%.

d) Para ese $\mathbf{A_2}$, calcular los valores de los coeficientes de transferencia en bucle abierto del conjunto, en función de $\mathbf{A_1}$. Hallar los valores de $\mathbf{A_1}$ para los cuales la respuesta del nivel **n** a una entrada de escalón unitario $\mathbf{n_c}$ es no oscilatoria.

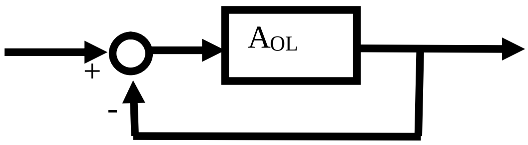
Hoja de ejercicios Nº7 : Estabilidad - Lugar de las Raíces

Esta hoja contiene ejercicios de estabilidad que se pueden usar en relación a temas que se ven en distintos momentos del curso. El propósito es enfocar con distintas técnicas las mismas preguntas o preguntas parecidas, y sobre los mismos ejemplos.

La primera vez pueden hacerse las partes vinculadas al criterio de Routh-Hurwitz y a Root-Locus. Más adelante en el curso, luego de estudiar el criterio de estabilidad de Nyquist, pueden hacerse las partes marcadas con @, que incluyen diagramas de Bode y Nyquist.
Asimismo, si el estudiante tiene acceso a SciLab o a Matlab, pueden comprobarse las soluciones en la computadora.

1A) Se considera un sistema con realimentación unitaria cuya transferencia en lazo abierto vale:

$$A_{OL}=K\frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$



a) Determine el rango de valores de K para el cual el sistema en lazo cerrado es estable.
b) Trazar el lugar geométrico de los polos del lazo cerrado cuando K es real positivo.
c) Si tiene acceso a Matlab con Control System Toolbox, con los siguientes comandos puede dibujar el Root-Locus:

```
s=tf('s')                % Define el caracter 's' como la variable de Laplace
h=1/(s*(s+2)*(s+4))      % Define la función de transferencia h
rlocus(h)                % Dibuja el lugar de las raíces del lazo cerrado  g = kh/(1+kh)
```

Y si quiere saber cómo funciona la función rlocus:

```
help rlocus
```

Si tiene acceso a Scilab con Control Systems CACSD, con los siguientes comandos puede dibujar el Root-Locus:

```
s=poly(0, 's')           // Define un polinomio de variable s con raíz en 0
h=1/(s*(s+2)*(s+4)       // Define la función de transferencia h
sis=syslin('c',h)        // Define un sistema lineal de tiempo continuo a partir de h
evans(sis)               // Dibuja el lugar de las raíces del lazo cerrado  g = kh/(1+kh)
```

Y si quiere saber cómo funciona la función evans:

```
help evans
```

1B) Se considera un sistema con realimentación unitaria cuya transferencia en lazo abierto vale:

$$A_{OL} = K\frac{s^2 + 35s + 300}{s(s^2 + 16)}$$

a) @ Dibujar los diagramas de Bode para módulo y fase de la transferencia **A_{ol}(s)** para **K = 5**.

b) @ Dibujar el diagrama de Nyquist y determinar, a partir del mismo, la condición de estabilidad del sistema en función de **K**.

c) Verificar la condición de estabilidad obtenida en b) aplicando el criterio de Routh Hurwitz.

d) Dibujar el lugar de las raíces del sistema.

Usando Matlab o Scilab:

e) @ Obtener los diagramas de Bode de módulo y fase de la transferencia **A_{ol}(s)** para K = 5.

f) @ Mostrar un detalle de la zona de resonancia.

g) @ Obtener el diagrama de Nyquist y estudiar la estabilidad del lazo cerrado a partir del mismo.

2) Para los sistemas con realimentación unitaria cuya ganancia de lazo abierto se da a continuación, se pide:

a) @ Dibujar los diagramas de Bode para módulo y fase de la transferencia de lazo abierto para el **K** sugerido.

b) @ Dibujar el diagrama de Nyquist y determinar a partir del mismo la condición de estabilidad del sistema en función de **K**.

c) Dibujar el lugar de las raíces del sistema.

1) $G_{ol}(s) = K\dfrac{(s+20)(s+80)}{s(s^2+2{,}4s+36)}$ *para K = 1*   *2)* $G_{ol}(s) = K\dfrac{(s+10)}{s^3+s^2-12s+40}$ *para K = 40*

3) $G_{ol}(s) = K\dfrac{s^2+19s+84}{s^3+15s^2+54s+40}$ *para K = 5*   *4)* $G_{ol}(s) = K\dfrac{s^2+6s+13}{s(s+1)(s+5)^2}$ *para K = 50*

3) Dado un sistema con: $G_{ol} = \dfrac{1000\ K\ (s^2+10s+50)(s+1)}{s^4(s+20)}$

Dibujar el lugar de las raíces y calcular el **K** límite de estabilidad.

4) Dado el siguiente sistema:

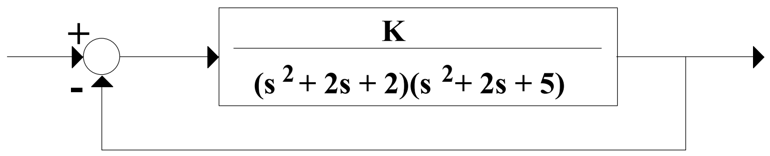


Figura 7.4

a) Dibujar el lugar de las raíces.

Usando Matlab o Scilab:

b) Obtener una traza del lugar de las raíces.

c) Evidenciar los puntos múltiples, encontrar el valor de K y la ubicación en el plano complejo de los mismos.

5*) Se considera un sistema realimentado cuya ganancia en lazo abierto es:

$$A_{OL} = K\frac{s^3 + 15s^2 + 97s + 183}{s^4(s+18)}$$

Dibujar el lugar de las raíces y hallar la condición de estabilidad. No se intentará determinar los puntos múltiples complejos, debiéndose analizar como varía la forma del lugar según si los mismos existen o no.

6) En el sistema realimentado en velocidad de la figura 7.6 se introduce un condensador **C** de 2 μF en el lazo de realimentación de velocidad.

a) Hallar polos y ceros de lazo cerrado.

b) Depende la estabilidad del valor de **C**?
Si es así calcular el C límite de estabilidad.

c) Dibujar el lugar de las raíces.

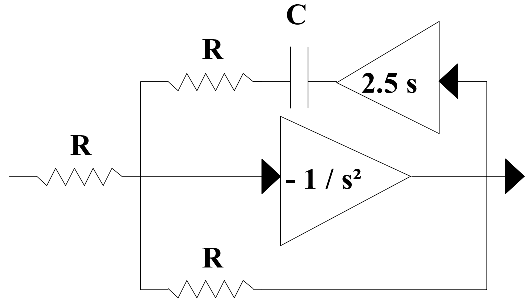
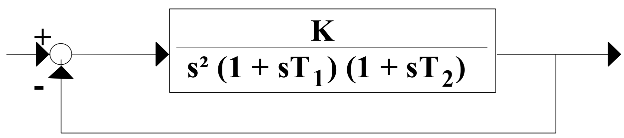


Figura 7.6

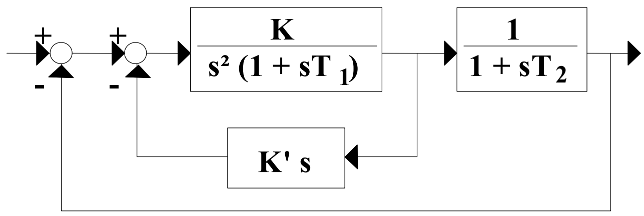
DATOS:
Los bloques tienen impedancia de entrada infinita e impedancia de salida nula.
R = 1 MΩ

7) a) Dado el sistema de la figura, determinar si existe algún valor de **K** para el cual el sistema es estable.

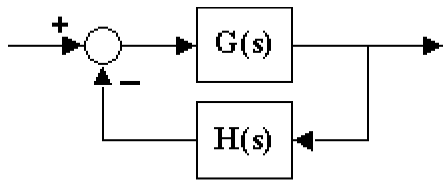


b) Dibujar el lugar de las raíces y el diagrama de Nyquist para el caso particular $\mathbf{T_1 = 0,1}$ y $\mathbf{T_2 = 1}$.

c) El sistema se modifica empleando una realimentación tacométrica.
Determinar para que valores de K' el sistema es estable. T1 y T2 de la parte anterior.



8*) Dado un sistema con:



$$G(s) = \frac{K.(1+0{,}1.s)}{s^3 + 2.s + 1} \quad \text{y} \quad H(s) = 1$$

a) Dibujar el lugar de las raíces y estudiar estabilidad.

b) Existe una ganancia límite de estabilidad?

9*) Se pide mostrar que el lugar de las raíces para un sistema de control con:

$$G(s) = \frac{s^2 + 6.s + 10}{s^2 + 2.s + 10} \quad , H(s) = 1$$

son arcos de una circunferencia centrada en el origen y de radio √10.

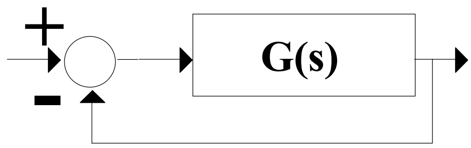
Hoja de ejercicios Nº8 : Estabilidad - Respuesta en frecuencia

1*) Recordando que el criterio de Nyquist fue obtenido para asegurar que un sistema en lazo cerrado sea estable,

a) Obtenga un criterio similar para determinar si los polos de un sistema tienen relación de amortiguamiento ξ mayor que un valor ξ_0.

b) Obtenga un criterio similar para determinar si los polos del sistema realimentado tienen parte real mayor que - 1.

2) Dado un sistema de control de transferencia:



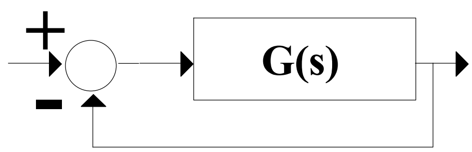
$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)} \qquad K \text{ es cte.} > 0$$

Determinar **K** para que el sistema realimentado sea estable
a) Utilizando Routh Hurwitz.
b) Utilizando Nyquist.

3) Dibujar diagrama de Bode (módulo y fase) de la transferencia:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = 90\frac{(1-\boldsymbol{s})^2}{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}^2 - \boldsymbol{s} + 9)}$$

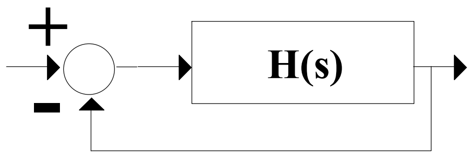
4*) Sea un sistema realimentado de la forma:



$$\text{donde } G(s) = \frac{6(s+10)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+8)}$$

a) Dibujar aproximadamente diagramas de Bode y de Nyquist de este sistema.

b) Si **G(S)** es de la forma:



Estudiar la estabilidad de **H(S)**, el lazo abierto. (Se sugiere estudiar por método de Nyquist)

5) a) Hallar el diagrama de bloques del sistema y calcular la transferencia $\mathbf{\Theta_o(s)/\Theta_i(s)}$.

b) Dibujar el diagrama de Nyquist y determinar, a partir del mismo, la condición de estabilidad del sistema.

c) Si se toma $\mathbf{R_2}$ igual a 6,5 veces el mínimo valor admitido para que el sistema sea estable, calcular $\mathbf{R_1}$ para que el sistema tenga el mayor margen de fase posible.

d) Dibujar el diagrama de Bode de lazo abierto resultante.

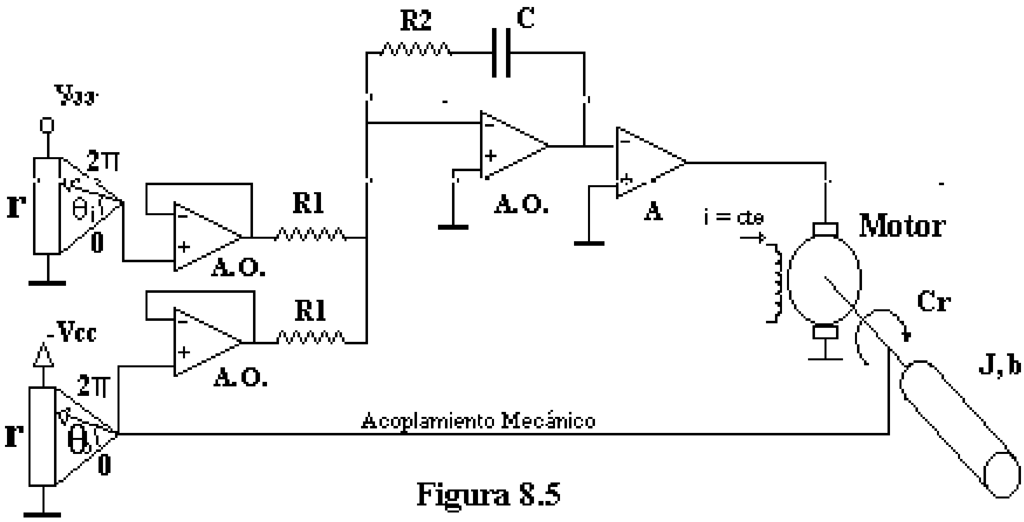


Figura 8.5

DATOS:

$V_{cc} = 2\ \pi V$, $r = 1\ k\Omega$, $C = 0{,}5\ \mu F$

(A.O.): Amplificador operacional ideal.

(A): Amplificador de potencia de ganancia $A = 10$, $Z_{in} = \infty$, $Z_o = 0$

(M): Motor de corriente continua de excitación independiente, $A\Phi = 4{,}2$ Vs/rad.
Constantes de Armadura: R = 8 ohms, L despreciable.

(C): Carga que ejerce un par resistente $C_r = b(d\theta_o/dt)$, $b = 0{,}295$ Nm/s
Inercia complexiva del motor y la carga $J = 0{,}05\ Nm/s^2$.

Hoja de ejercicios Nº9 : Compensadores

1) Se considera un sistema con realimentación unitaria y ganancia de lazo abierto:

$$G_{ol}(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}\frac{400}{s(s+8)}$$

Determinar **a > 1** y **T** de modo que el sistema tenga un margen de fase **Φ = 50° ± 1°**.

2) Dado un sistema con realimentación unitaria y ganancia de lazo abierto:

$$G_{OL}(s) = \frac{1}{s(1+0{,}1.s)(1+0{,}2.s)(1+0{,}25.s)}$$

Diseñar un compensador serie tal que el sistema compensado tenga:

- margen de fase **Φ = 45° ± 1°**
- error en régimen estacionario frente a una rampa unitaria igual a 0,1.

3) Se considera un sistema con realimentación unitaria y ganancia de lazo abierto:

$$G_{ol}(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}.\frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

a) Estudiar la estabilidad del sistema en función de **a** y **T**.

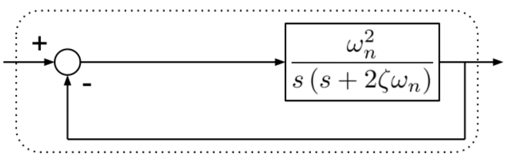
b) Suponiendo **a < 1**, determinar **a** y **T** tales que el sistema tenga un margen de fase **Φ = 60º ± 1º**.

c) Para el valor de **T** hallado en la parte b) dibujar el lugar de las raíces tomando **a** como parámetro.

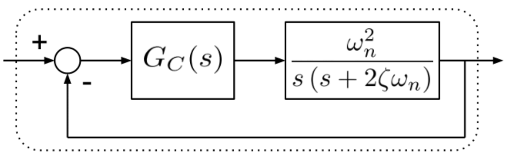
4) *Introducción al problema de sintonización de un controlador Proporcional-Derivativo (PD).*
Se desea mejorar la respuesta de un sistema con ganancia de lazo abierto Gol dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

Para ello se lo compensará con un controlador serie de transferencia **G_C(s) = 1 + Ks** y realimentación unitaria.



Sistema sin compensar



Sistema compensado

a) Determinar **K** de modo que los polos de lazo cerrado del sistema compensado sean complejos con un amortiguamiento de 0,9.

b) Determinar el margen de fase del sistema compensado y sin compensar.

c) Determinar el ancho de banda del sistema compensado y sin compensar.

d) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar. Analice y explique las diferencias entre ambas respuestas.

5) *Introducción al problema de sintonización de un controlador Proporcional-Integral (PI).*
Se desea mejorar la respuesta de un sistema con ganancia de lazo abierto Gol dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}8 \quad ,\omega_n = 10$$

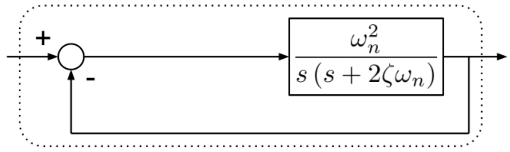
Para ello se lo compensará con un controlador serie de transferencia **G_C(s) = 1 + k/s** y realimentación unitaria.

a) Determinar **k** de modo que los polos del sistema compensado tengan un factor de amortiguamiento 0,6.

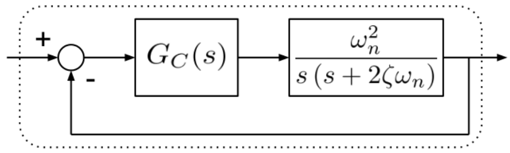
b) Determinar el margen de fase del sistema compensado y sin compensar.

c) Determinar el ancho de banda del sistema compensado y sin compensar.

d) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar.



Sistema sin compensar



Sistema compensado

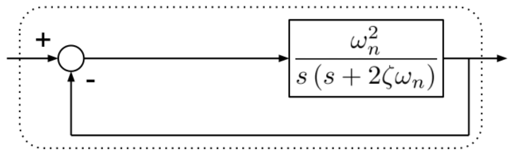
6*) Se desea mejorar la respuesta de un sistema con ganancia de lazo abierto Gol dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

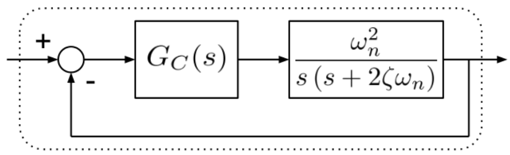
Para ello se lo compensará con un compensador serie de transferencia **G_C(s) = 1 + Ts , T = 0,2** y realimentación unitaria.

a) Calcular el ancho de banda, frecuencia de resonancia y pico de resonancia para el sistema compensado.

b) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar.



Sistema sin compensar



Sistema compensado

7) *Introducción al problema de sintonización de un controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID).*
Se considera un sistema con realimentación unitaria y ganancia de lazo abierto:

$$G_{ol}(s) = (1 + K_1 s + \frac{K_2}{s}).\frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

a) Estudiar la estabilidad del sistema.

b) Dibujar el contorno de las raíces tomando **K_2** como parámetro. Discutir según el valor de **K_1**.

c) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema para **K_1 = 0,25** y **K_2 = 1**.

Hoja de ejercicios Nº10 : Tiempo Discreto - Transformada Z

1) Determinar la transformada Z de las siguientes sucesiones: $\mathbf{u_n = 1}$; $\mathbf{u_n = n}$; $\mathbf{u_n = 1/(2^n)}$

2) La transformada Z de una sucesión $\mathbf{h_k}$ es:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{z^3}}{\mathbf{z^3 - 3z^2 + 5z - 9}}$$

a) Hallar la transformada Z de la sucesión $\mathbf{h_{k-3}.u_{k-3}}$ (donde u_k es el escalón unitario).

b) Hallar la transformada Z de la sucesión $\mathbf{h_{k+1}.u_k}$

3) Hallar las sucesiones cuyas transformadas Z son las siguientes:

$$a)\ H(z) = \frac{0{,}5.z}{(z-1)(z-0{,}6)} \qquad b)\ H(z) = \frac{0{,}5.(z+1)}{(z-1)(z-0{,}6)}$$

$$c)\ H(z) = \frac{0{,}5}{(z-1)(z-0{,}6)} \qquad \text{d) } \mathrm{H(z)} = \frac{\mathrm{z.(z-0{,}7)}}{\mathrm{(z-1)(z-0{,}6)}}$$

$$\text{e) } \mathrm{H(z)} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}^2 - z + 1} \qquad f)\ \mathrm{H(z)} = \frac{0{,}5.(\mathrm{z}+1)}{\mathrm{z}^2 - 2.z + 4}$$

(Se pide encontrar una expresión para h, no los valores numéricos de h_k)
Sugerencia: usar diferentes métodos (tablas, residuos)

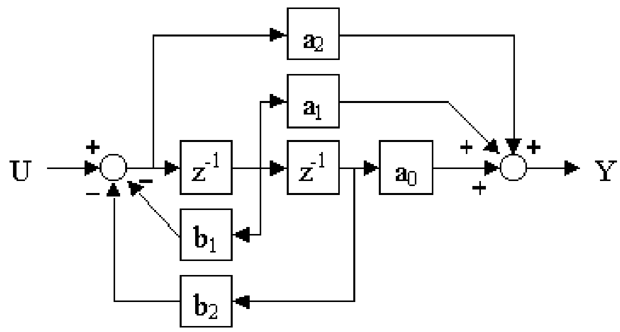
4) Resolver la siguiente ecuación en diferencias: $\mathbf{x_k - 3x_{k-1} + 2x_{k-2} = e_k}$

donde $e_k = \begin{cases} 1 & si\ k = 0\ o\ 1 \\ 0 & si\ k > 1 \end{cases}$ con condiciones iniciales: **x(-1) = 0** y **x(-2) = 0**.

5) El diagrama de bloques representa un filtro discreto de segundo orden descrito por la función de transferencia:

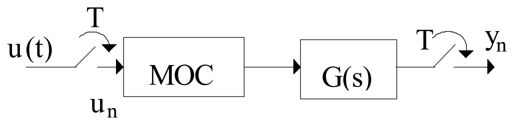
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 - 1{,}96.z + 0{,}99}{z^2 - 1{,}98.z + 0{,}99}$$

Determine $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$.



Hoja de ejercicios Nº11 : Tiempo Discreto - Muestreo y Estabilidad

1) Hallar la transferencia muestreada **A(z)** para los sistemas de la figura:



A(z) = Z(y_n)/Z(u_n) , (MOC es un mantenedor de orden cero)

a) G(s) = 1

b) G(s) = 1/s

c) G(s) = 1/(s + a)

d) G(s) = (s + 3)/(s^2 + 2.s + 2)

2*) Un mantenedor de orden cero (MOC) puede interpretarse como una extrapolación de las muestras utilizando un polinomio de orden cero.

a) Halle la expresión de la salida de un MOC.

b) Halle la expresión de la salida de un mantenedor de orden uno, en el cual se extrapola usando polinomios de primer orden.

3) Considérese el sistema: $\begin{cases} \dot{x} = -\,a.x + b.u \\ y = c.x \end{cases}$

a) Halle la representación en variables de estado del sistema cuando se utiliza a la entrada un MOC.

b) Determinar como varían los polos del sistema muestreado, con el período de muestreo.

4) Deducir el sistema discreto correspondiente a los siguientes sistemas continuos cuando se emplea un circuito MOC.

$$a)\quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad b)\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 3u$$

5) Dado el sistema en tiempo continuo: $\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = A.X(t) + B.U(t) \\ Y(t) \ = C.X(t) \end{cases}$

con $X(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} & x \end{bmatrix}^T$, se decide trabajar en tiempo discreto utilzando muestradores y un MOC. El sistema discreto resultante se expresa como:

$$\begin{cases} X_{k+1} = \mathscr{A}.X_k + \mathscr{B}.U_k \\ Y_k = \mathscr{C}.X_k \end{cases}$$

¿Como es el vector de estados X_k? ¿Cuál es su relación con X(t)?

6) Muchos sistemas físicos se pueden representar de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} u$$ donde **a**, **b**, **c** y **d** son no negativos.

Deducir la representación del sistema muestreado cuando se emplea un mantenedor de orden cero. (Sugerencia: verificar que los polos del sistema son reales)

7) Determinar si los siguientes polinomios tienen sus raíces dentro del círculo unitario:

a) $z^2 - 1{,}5.z - 0{,}9$

b) $z^3 - 3.z^2 + 2.z - 0{,}5$

c) $z^3 - 1{,}7.z^2 + 1{,}7.z - 0{,}7$

8) Hallar la representación en variables de estado del sistema en tiempo discreto resultante de aplicarle un MOC a la entrada.

$\begin{cases} \dot{X} = A.X + B.U \\ Y = C.X \end{cases}$ donde $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y las matrices A del ejercicio 2 del práctico 5.

9) Dado el polinomio **P(z) = $\mathbf{z^2}$ + az + b,** hallar la región del plano (a,b) para la cual las raíces de P(z) caen dentro del círculo unitario.

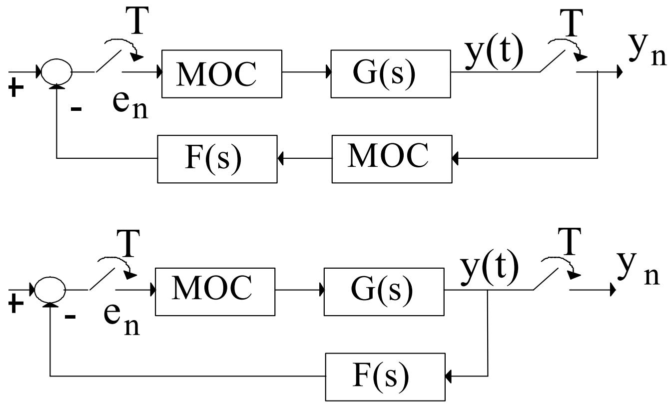
10*) Dado el sistema d**X/dt = AX + BU**, **Y = CX** se muestrean las entradas con un mantenedor de orden uno.

i) Hallar una representación en variables de estado del sistema en tiempo discreto resultante.

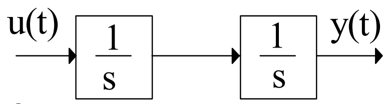
ii) Hallar la transmitancia muestreada **Y(z)/U(z)** para el sistema continuo **G(s) = 1/s** con un mantenedor de orden uno a la entrada. Verifique consistencia con la parte **i)**.

11) Halle la transmitancia muestreada **Y(z)/U(z)** para los siguientes sistemas:

$G(s) = 1/s$; $F(s) = 1/(s+2)$.

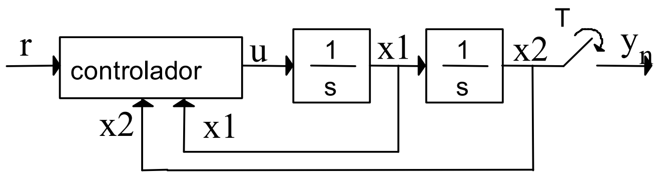


12) Sea el sistema INTEGRADOR DOBLE de la figura:



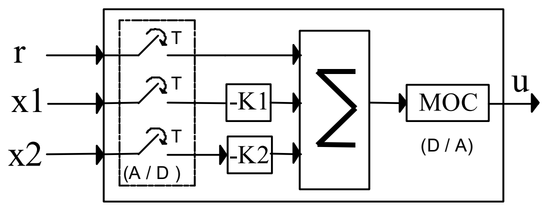
a) Halle el modelo en variables de estado; ¿el sistema es controlable?

b) Se realiza una realimentación de estados con ganancias **K1** y **K2**. ¿En que región del plano (K1,K2) el sistema es estable?



c) Se implementa el controlador en tiempo discreto con período de muestreo **T**, según la figura:

controlador :

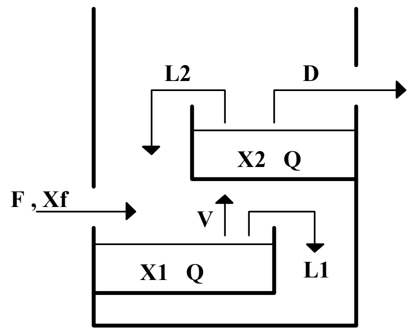


¿Para qué valores de **K1**, **K2** y **T** el sistema es estable?

Hoja de ejercicios Nº12 : Problemas de examen
(solo para clases de consulta)

Exámen de Control I 05/03/90 - Problema N° 1

Vamos a construir un modelo simplificado de una torre de destilación. La torre posee dos bandejas y el producto a destilar será una mezcla de dos componentes **A** y **B**.
Llamaremos **x** a la concentración molar del producto **A**, que queremos obtener puro por medio de la destilación (x = moles de **A** / moles de mezcla).



Los caudales indicados en la figura **F**, **V**, $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, **D** son caudales molares (moles de mezcla por unidad de tiempo). Admitiremos que la concentración molar en los vapores (**V** y **D**) es igual a la del líquido, multiplicada por una constante **ß**.
La cantidad de moles **Q** por bandeja se supone constante. El caudal de alimentación y la concentración de **A** en él son constantes.

a) Halle una representación en variables de estado. Tome como variables de estado $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, como entrada **V** y **D**, y como salida los estados. Note que la condición **Q = cte** establece dependencias lineales entre los caudales indicados en la figura.

b) Linealice las ecuaciones de estado alrededor de un punto de equilibrio.

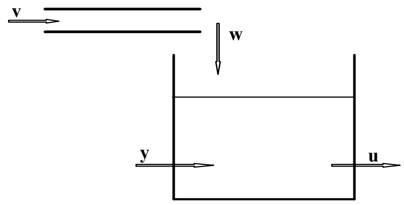
Aplicación numérica :	$(V/Q) = 0{,}1\ s^{-1}$;	$(L1/Q) = 0{,}1\ s^{-1}$;	$(D/Q) = 0{,}05\ s^{-1}$
	$x_2 = 0{,}6$;	$Q = 1$;	$ß = 1{,}5$

c) Halle la matriz de transición de estados y la matriz de transferencia.

d) Si las entradas son escalones halle la matriz de ganancia en régimen permanente Ho.

Exámen de Control I 16/11/89 - Problema N °2

Una cinta transportadora de retardo **T** alimenta un depósito de material. De este depósito otro proceso extrae material. Se desea controlar la entrada de material a la cinta de modo de mantener el nivel del depósito en un valor deseado.
Para ello se trabaja en tiempo discreto. Se divide el tiempo en intervalos de longitud **t**. Se cumple que **T = nt**.



Sean:

- $\mathbf{v_k}$ material que entra a la cinta en el intervalo [kt,(k+1)t)
- $\mathbf{w_k}$ material que sale de la cinta en el intervalo [kt,(k+1)t)
- $\mathbf{u_k}$ material que sale del depósito en el intervalo [kt,(k+1)t)
- $\mathbf{y_k}$ material acumulado en el depósito en el instante kt (diferencia con el valor deseado)

Se realimenta la entrada a la cinta en la forma: $\mathbf{v_k = -ay_k + bu_k}$
El sistema resultante tiene a las sucesiones $\mathbf{(u_k)}$ como entrada y $\mathbf{(y_k)}$ como salida.

Se pide :

a) Obtener un diagrama de bloques y una representación en variables de estado del sistema.

Se trabaja para las partes b), c) y d) con **n = 1** (T = t).

b) Hallar la condición en **a** para que el sistema sea estable.

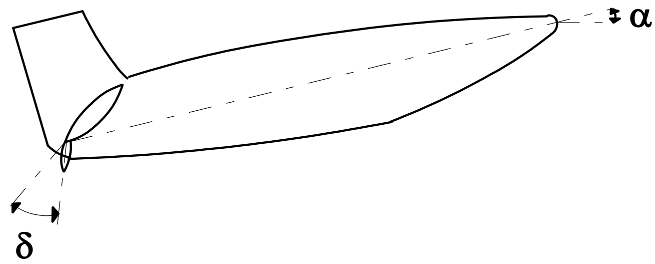
c) Hallar la transferencia **H(z) = Y(z)/U(z)**.

d) Hallar **b** para que con $\mathbf{(u_k)}$ un escalón unitario, se cumpla asintóticamente el objetivo de control. Para ese valor de **b** y con **a = 0,5**, calcular los 10 primeros términos de $\mathbf{(y_k)}$.

Exámen de Control I 29/01/91 - Problema N° 2

Se considera el movimiento angular de deflección de un avión respecto de la horizontal en ausencia de perturbaciones externas. Dicho sistema puede representarse, para pequeños apartamientos, por la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{1}{T}\frac{da}{dt} = A\,\delta(t)$$



siendo **α(t)** el ángulo respecto de la horizontal y **δ(t)** el ángulo de deflección de los alerones.
Los alerones son accionados por medio de un servomecanismo que responde a la siguiente relación: (**e(t)** es la tensión de entrada al servo).

$$\frac{d\delta}{dt} = K\,e(t)$$

Se ha despreciado en el modelado la constante de tiempo del servo, ya que es mucho menor que la de la planta **T**, y no influye significativamente en el problema.

Se pide:

i) Hallar una representación en variables de estado del sistema, considerando **e(t)** como entrada y **α (t)** como salida.

ii) Se excita el sistema con una señal **e(t)** escalonada, con escalones de duración **h**, llamemos e_k a la señal en tiempo discreto correspondiente. Halle una representación en variables de estado del sistema en tiempo discreto resultante.

iii) ¿El sistema es estable?

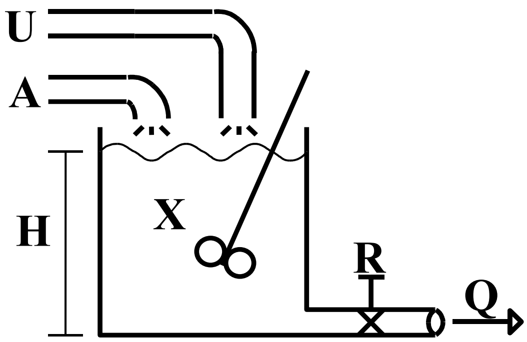
iv) Se considera que el período de muestreo **h** es mucho menor que la constante de tiempo de la planta **T**. Halle una expresión simplificada de las matrices halladas en el punto ii).
¿El sistema simplificado es controlable?

v) Diseñe un controlador en tiempo discreto, realizable (se excluye cancelación de polos y ceros, y cualquier realización no causal), que haga estable el sistema, asignando todos los polos al origen del plano Z, para lo cual se pide hallar las relaciones que deben cumplir todos los parámetros del controlador.

Exámen de Control I 29/01/91 - Problema N° 1

Se considera una planta de una industria de procesos químicos en la cual el proceso a estudiar es la dinámica de la mezcla de dos componentes, ambos líquidos. La mezcla se efectua en un tanque de seccíon uniforme **S** y se puede suponer la concentracíon **X** (volumen del liquido 1 / volumen de la mezcla) homogenea en todo el tanque (figura 1). Los caudales de alimentación de los líquidos 1 y 2 son **U** y **A** respectivamente, y el caudal de salida de la mezcla es **Q**.
Se considera que:

- hay conservación de volumen en la mezcla.
- las densidades de ambos líquidos se suponen iguales.
- **H** es el nivel de la mezcla en el tanque.
- **R** es la resistencia hidráulica, donde **R = dH/dQ**.
- el flujo es turbulento: $\mathbf{Q = (K.H)^{1/2}}$ (K cte).



Considerando **U** y **A** como las entradas al sistema, **H** y **X** como los estados y el vector de salida igual al de estados:

a) Encontrar las ecuaciones dinámicas del sistema.

b) Linealizar el sistema en un entorno de un punto $\mathbf{P_0}$ de equilibrio:

$H = H_0+h$, $Q = Q_0+q$, $X = X_0+x$, $U = U_0+u$, $A = A_0+a$

Hallar el modelo en variables de estado y la matriz de transferencia del sistema linealizado.

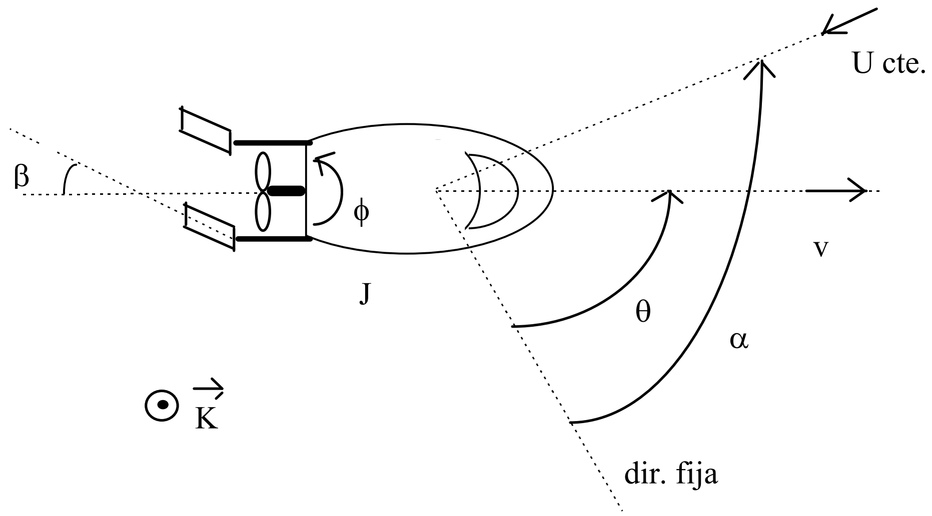
Datos: En P_0 $X_0 = 0{,}7$; $Q_0= 10\ m^3/s$; $H_0= 5\ m$; $S = 10\ m^2$

c) Suponemos que a este modelo aplicamos las entradas **u(t) = Y(t)** m^3/s y **a(t) = - 0,7.Y(t)** m^3/s. Calcular el valor en régimen de **X** y **H** para el modelo linealizado, para el modelo no lineal y encontrar los respectivos errores relativos.
error relativo = (régimen no lineal-régimen lineal)/(régimen no lineal)

d) Consideremos una realimentación de los estados tal que: $\mathbf{a(t) = k_1.x(t) - k_2.h(t)}$.
Estudiar qué relaciones deben de cumplir $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$ para que el sistema sea estable. Calcular $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$ para que en régimen las salidas reales del sistema sean **X = 0,72** y **H = 6,2** m, cuando la entrada es un escalón:

u(t) = Y(t) m^3/s (considerar el modelo linealizado).

Exámen de Control I 14/01/95 - Problema N° 1



En un minisubmarino se controla la dirección de desplazamiento mediante un par de aletas que desvían el flujo generado por la hélice propulsora generando, por acción y reacción, un momento $\mathbf{C}\dot{\phi}\ \mathbf{sen}(\beta)\vec{\mathbf{K}}$. ($\vec{\mathbf{K}}$ saliente del plano del dibujo).

Se desea que la dirección de desplazamiento mantenga un ángulo **θ** constante con una dirección de referencia fija independientemente del momento $-\mathbf{DU}\ \mathbf{sen}(\alpha-\theta)\vec{\mathbf{K}}$ que se produce por efecto de una corriente que se desplaza con velocidad **U** y forma ángulo **α** variable respecto de la dirección de referencia. Estudiaremos el efecto de las variaciones de velocidad del minisubmarino sobre su dirección de desplazamiento por lo que supondremos **β ≡ βo cte.**

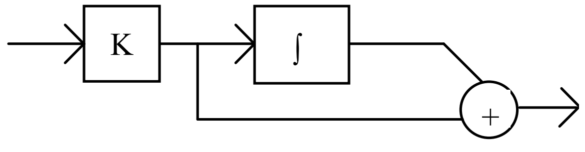
Datos **C = 4** **DU =5,657** **J = 1**

a)- i) Hallar la ecuación no lineal del sistema sabiendo que las entradas son **α** y **ϕ** y la salida es **θ.**
ii) Linealizarla en torno a la trayectoria **α** ≡ 60º **θ** ≡ 15º $\dot{\phi} \equiv 2\,rad\,/\,seg$ y construir un diagrama de bloques del sistema utilizando bloques proporcionales, sumadores e integradores.
iii) Hallar las ecuaciones de estado del sistema.

Nota Para la parte ii) se sugiere analizar el efecto de cada entrada por separado.

b)- Suponiendo **α** ≡ 60º , (deja de ser entrada) hallar el nuevo modelo en variables de estado, hallar $\mathbf{e^{At}}$ y utilizarla para calcular la evolución de los estados **X(t)** cuando las condiciones iniciales son $\theta(0)=\theta_o\,,\dot{\theta}(0)=0$ y la entrada **ϕ(t)** ≡ 0 . Deducir **θ(t)** ese caso.

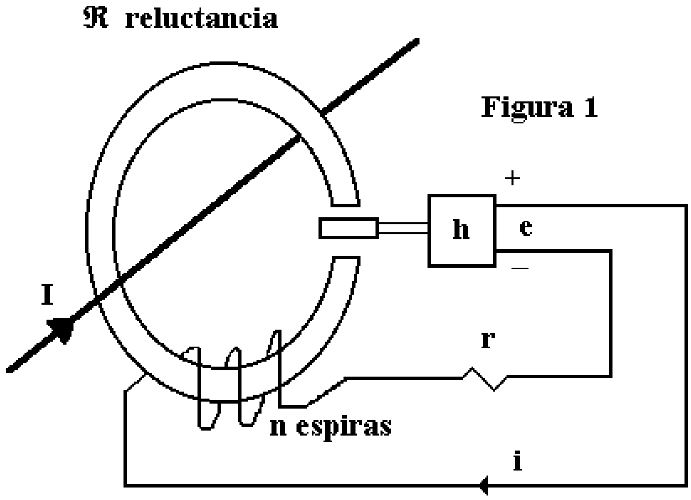
c)- Para estabilizar el sistema se propone el siguiente controlador paralelo:



i) Hallar los valores de **K** para los cuales el sistema realimentado es estable utilizando Routh Hurwitz**.**
ii) Trazar el Diagrama de Nyquist correspondiente y verificar la condición hallada en i).

Exámen de Control I 14/08/95 - Problema N° 2

El sistema de la **figura 1** es un transformador de corriente para corriente continua. La tensión **e(t)** es proporcional al flujo por el circuito magnético, **e(t)** = **hφ(t)**.

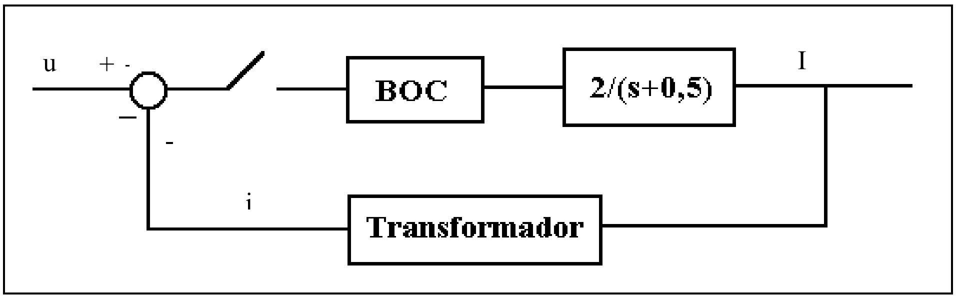


Se pide:

1) Tomando **φ(t)** como variable de estado, **I(t)** como entrada e **i(t)** como salida, escribir las ecuaciones de estado de este sistema y hallar su función de transferencia. Realizar un diagrama de bloques de este sistema indicando en él **φ(t)**, **φ(t)**, **I(t)**, **i(t)** y **e(t)**.

2) Deteminar la transferencia completa del sistema considerando el siguiente ensayo: con el sistema en reposo se introduce una entrada **I(t)** = Y(t) (escalón unitario) y se mide la salida **i(t)**.
Los resultados observados son: la ganacia en régimen es igual a **0,1** y el máximo valor de la salida vale **0,2**. Se sabe que **$\Re$r** = **50**. (unidades compatibles)

3) Se utiliza el transformador para realimentar un sistema de transferencia **2/(s + 0,5)** como indica la **figura 2**. Expresar la transferencia discreta entre la entrada y la salida del sistema



realimentado utilizando transmitancias muestreadas. Calcular estas transmitancias.