**FACULTAD DE INGENIERÍA**
**UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA**

EXAMEN DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

## Ejercicio 1

Sea $f \in H(\mathbb{C})$ una función entera de la cual sabemos que la imagen de un rectángulo $R$ de vértices $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ es otro rectángulo $R'$ de vértices $a' = f(a), b' = f(b), c' = f(c), d' = f(d)$. Llamaremos $\varphi$ al argumento de $\alpha = (b' - a')/(b - a)$. Observar que al girar un ángulo $\varphi$ los lados de $R$ los mismos quedan paralelos a sus respectivas imágenes por $f$. Supondremos también que la función $f$ es inyectiva.

(a) Probar que $\arg(f'(z)) = \varphi$ para todo $z \in \partial R$.
(b) De la parte anterior se deduce que el conjunto $f'(\partial R)$ está contenido en una semirrecta. Demostrar que la función $f'$ no es abierta y por lo tanto debe ser constante.
(c) Concluir que los rectángulos $R$ y $R'$ son semejantes.

**Ejercicio 2** Calcular usando el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+1)^2}$$

## Ejercicio 3

Enunciar y demostrar el teorema fundamental del álgebra.

*Importante*: justificar detalladamente los razonamientos, citando los teoremas utilizados.

*Date*: Martes 5 de diciembre de 2023.