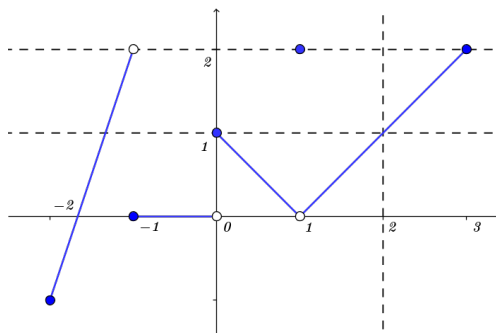


Ejercicio 1 (Cálculo gráfico de límites)

Dada la gráfica:



1. Determinar:

a) $g(-2) = -1$

c) $g(0) = 1$

e) $g(2) = 1$

b) $g(-1) = 0$

d) $g(1) = 2$

f) $g(3) = 2$

2. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra arriba o explique por qué no existen:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

Solución: Este límite no existe ya que $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Solución: Este límite no existe ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

Solución: El límite es $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Solución: El límite es $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$.

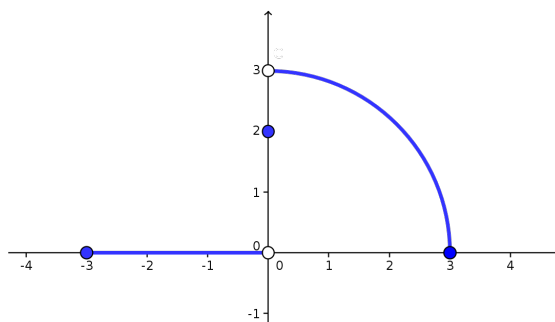
Ejercicio 2 (Cálculo gráfico de límites laterales)

A partir de la función cuya gráfica se muestra calcular:

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



Solución:

Se observa que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Ejercicio 3 (Límites laterales)

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

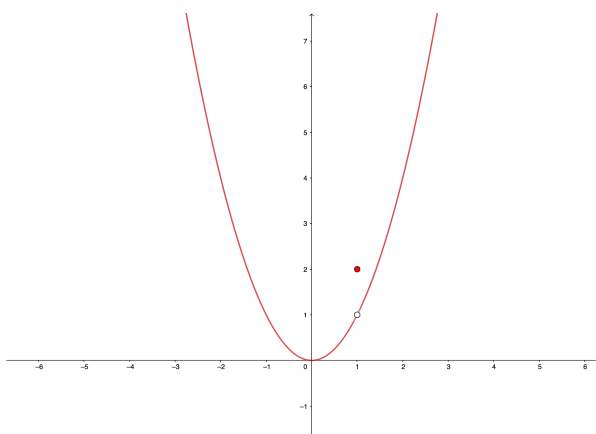
Graficar f y hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solución:



Se observa que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ y teniendo en cuenta que ambos coinciden $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

¿Qué sucede con los límites anteriores si f no está definida en $x = 1$?

Solución:

Los límites anteriores darían lo mismo ya que en la definición de límite de $f(x)$ cuando x tiende a b ($\lim_{x \rightarrow b} f(x)$) no se toma en cuenta lo que ocurre en el punto b .

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1, \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

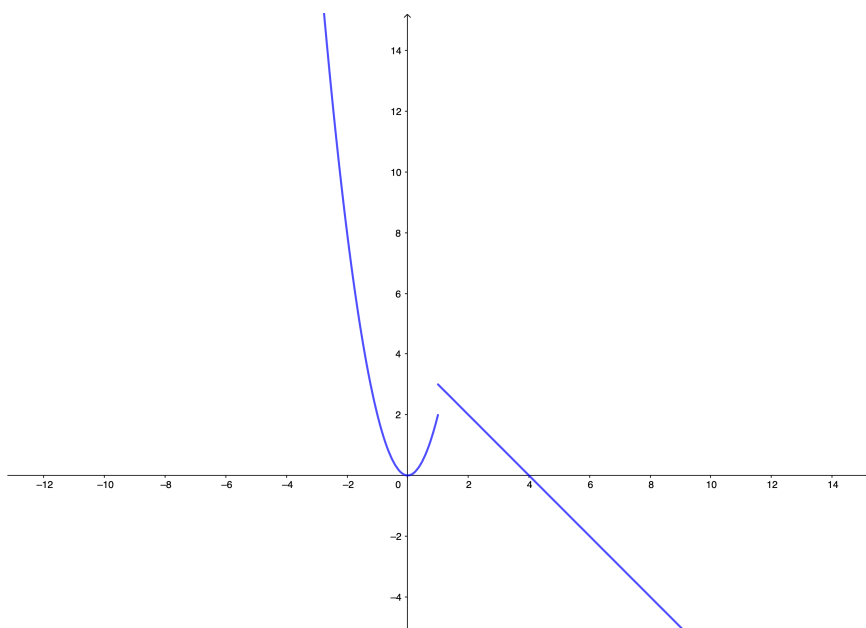
Graficar f y hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solución:



Se observa que $\lim_{x \rightarrow 1^+} 4 - x = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, concluimos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe.

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{si } x \leq -2, \\ -4 + x & \text{si } x > -2. \end{cases}$

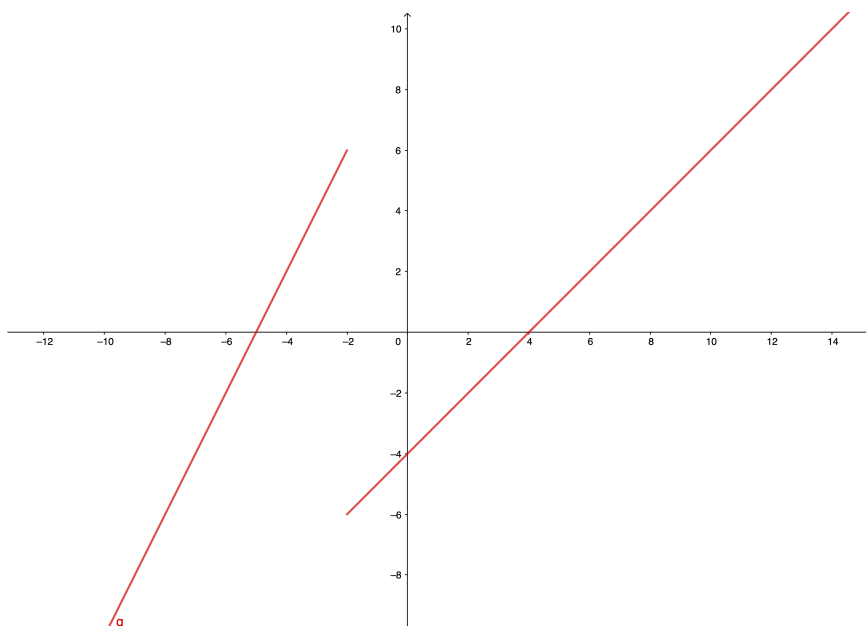
Graficas f y hallar:

a) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Solución:



Se observa que $\lim_{x \rightarrow -2^+} -4 + x = -6$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} 2x + 10 = 6$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, concluimos que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existe.

Ejercicio 4 (Operaciones con límites)

Calcular los siguientes límites, indicando las propiedades de las operaciones con límites utilizadas:

1. $\lim_{x \rightarrow 4} 5x^2 - 2x + 3$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 4} 5x^2 - 2x + 3 = 5 \left(\lim_{x \rightarrow 4} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 4} x \right) - 2 \left(\lim_{x \rightarrow 4} x \right) + 3 = 5 \times 4 \times 4 - 2 \times 4 + 3 = 75$$

En este caso hemos usado: si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ con $F, G \in \mathbb{R}$ entonces:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = F + G$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = F \cdot G$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+4x-3)} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right) - 2}{\left(\lim_{x \rightarrow -1} x^2 \right) + 4 \left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right) - 3} = \frac{-1-2}{1-4-3} = \frac{1}{2}.$$

En este caso hemos usado, además de las dos propiedades del ejercicio anterior:

- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{F}{G}$ si $G \neq 0$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^3+2x^2-1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (5-3x)} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow -2} x^3 \right) + 2 \left(\lim_{x \rightarrow -2} x^2 \right) - 1}{5 + 3 \left(\lim_{x \rightarrow -2} x \right)} = \frac{-8+8-1}{5+6} = \frac{-1}{11}.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x+2}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+x-6)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \right) + \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) - 6}{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) + 2} = \frac{4+2-6}{2+2} = 0.$$

Observamos que el límite del denominador no puede ser 0 y podemos aplicar la propiedad del cociente de los límites.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$

Solución:

En este caso el límite del denominador es 0 por lo que no podemos usar la propiedad del límite del cociente. Observamos que $\lim_{x \rightarrow 0} (2+x)^3 - 8 = 0$ por lo que podemos factorizar esta expresión.

$$\text{Factorizando, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2+6x+12)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 6x + 12) = 12.$$

6. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7}$.

Solución:

En este caso el límite del denominador es 0 por lo que no podemos usar la propiedad del límite del cociente. Observamos que $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x+2} = 3$. Ahora analizaremos $\lim_{x \rightarrow 7} (x-7)$.

A partir del signo de $(x-7)$ podemos observar que:

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} (x-7) = 0^+ \text{ y que } \lim_{x \rightarrow 7^-} (x-7) = 0^-.$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} = +\infty \text{ mientras que } \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} = -\infty.$$

Ejercicio 5 (Operaciones con límites) Asumiendo que existe, calcular para los siguientes ejemplos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{5} = 1$.

Solución:

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ existe, entonces: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{5} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{5}{2}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.

Solución:

$$\text{Como el } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ existe y } \lim_{x \rightarrow -2} x^2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -2} x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} f(x)}{4} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)^2 - 6f(x) + 2 = -7$.

Solución:

Si llamamos L al $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)^2 - 6f(x) + 2 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right)^2 - 6 \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right) + 2 = L^2 - 6L + 2 = -7 \Leftrightarrow L = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Solución:

Observamos en este caso que, como el límite del denominador es 0, no podemos usar la propiedad del cociente de los límites. Por otra parte si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \neq 0$ los resultados posibles de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ serían $+\infty$ o $-\infty$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$.

Solución:

Análogamente al ejercicio anterior, para que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$, se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)-5) = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5.$$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)} = 1.$

Solución:

En este caso, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 0$ pues de serlo, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2f(x)-x}$ no estaría definido. Luego, podemos usar las propiedades del cociente de límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2f(x)-x}}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} = \frac{\sqrt{2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} x}}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}$$

Llamemos L al $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

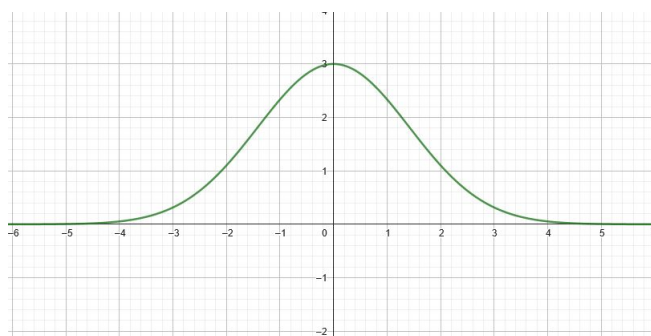
$$\frac{\sqrt{2L-1}}{L} = 1 \Leftrightarrow 2L-1 = L^2 \Leftrightarrow L = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Ejercicio 6 (Interpretación gráfica de límite)

1. Dibujar el gráfico de una función f que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:

- $f(0) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

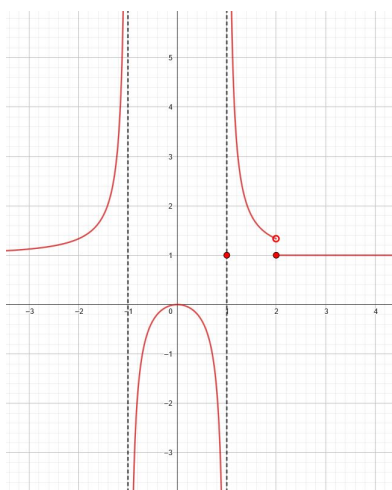
Solución:



2. Dibujar el gráfico de una función f que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:

- $f(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

Solución:



Ejercicio 7 (Límites con cociente de polinomios)

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 5;$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4} = \frac{1}{2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$

Solución:

En este caso, como se trata de cociente de expresiones polinómicas en las que el límite de numerador y denominador son 0, factorizamos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2.$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3 - x^2}.$

Solución:

Análogo al ejercicio anterior

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 - 2x)}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x-1} = 0.$$

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$

Solución:

Análogo al ejercicio anterior

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a.$$

2. Consideremos las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$h(x) = \frac{x^8-1}{x^5-x}$$

a) Asumiendo que existen, calcular los límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} h(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

Solución:

Observar que factorizando, obtenemos que siempre que $x \neq 1$ $f(x) = x+1$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$ y si además $x \neq -1$, $h(x) = \frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x}$, de donde se sigue:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1/2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$$

b) Revisar los resultados en en la siguiente [aplicación Geogebra](#).

Ejercicio 8 (Límites con valor absoluto)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow -4} |x+4| = 0^+;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}.$$

Solución:

Distingamos dos casos:

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

Entonces: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ no existe.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = 0.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}.$$

Solución:

Distingamos dos casos:

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 3/2^+} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} \frac{x(2x-3)}{(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3/2^+} x = \frac{3}{2}$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 3/2^-} \frac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3/2^-} \frac{x(2x-3)}{-(2x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3/2^-} -x = -\frac{3}{2}$$

Entonces: $\lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$ no existe.

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 9 (Límites con radicales)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} + 1 = 2.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-x}}{x-1}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x-x})(\sqrt{x+x})}{(x-1)(\sqrt{x+x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^2}{(x-1)(\sqrt{x+x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x)}{(x-1)(\sqrt{x+x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{\sqrt{x+x}} = -\frac{1}{2}.$$

5. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x+2-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{1}{6}.$$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) = 4.$$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 10 (Límites con exponencial y logaritmo)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} e^{x^3-1} = e^{-2};$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\text{sen}(x-2)} = 1;$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(\sqrt{x+3}) - \ln(\sqrt{x}) = \ln(2);$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} = e - 1;$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \log(x^2) = 0;$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \log(1 + \text{sen}(x-2)) = 0.$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 11 (Límites con trigonométricas)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}(x) = 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1)(1 + \operatorname{sen}(2x)) = 0$;
3. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 2x^3) \operatorname{cos}(x^2) = 0$;
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \log(x^2) \operatorname{sen}^2(x + 1) = 0$.

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 12 (Existencia y operaciones con límites) Probar por medio de un ejemplo que:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ puede existir aún cuando no exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$ puede existir aún cuando no exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Solución:

En este caso un ejemplo sencillo que podemos usar para ambos ejercicios puede ser:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Observamos que: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ no existen.

Si se considera la suma de las funciones tenemos que $(f + g)(x) = 0$. Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x) = 0$.

Si consideramos ahora el producto de las funciones, $(f \cdot g)(x) = -1$. Entonces, $\lim_{x \rightarrow 0} (f \cdot g)(x) = -1$.

Ejercicio 13 (Infinitésimos equivalentes) 1. Dadas dos funciones reales f y g , decimos que f y g son infinitésimos en $x = a$ si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Decimos además, que son **infinitésimos equivalentes** si:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Con la ayuda de la siguiente **aplicación Geogebra de análisis de límite puntual**, determinar si las siguientes son infinitésimos equivalentes en $x = 0$:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x$
SI | d) $f(x) = \operatorname{cos}(x)$ y $g(x) = x$
NO | g) $f(x) = \ln(1 + x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$
SI |
| b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x^2$
NO | e) $f(x) = \operatorname{cos}(x)$ y $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$
SI | h) $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1 + x$
SI |
| c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$
NO | f) $f(x) = \ln(1 + x)$ y $g(x) = x$
SI | |

2. A partir del ejercicio anterior calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\operatorname{sen}(x))^4}{4} - (\operatorname{cos}(x))^2}{e^{3x} + \ln(1 + 2x)}.$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\operatorname{sen}(x))^4}{4} - (\operatorname{cos}(x))^2}{e^{3x} + \ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2}{1 + 3x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4} - \frac{4 - 4x^2 + x^4}{4}}{1 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4 - 4x^2}{4}}{1 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1} = -1.$$

Ejercicio 14 (Órdenes de infinito) Supongamos f y g dos funciones reales tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Decimos que f es un infinito de orden superior a g (y escribimos $g < f$) si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Con la siguiente **aplicación Geogebra**, ordenar las siguientes funciones según los órdenes de infinitos:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1. $f_1(x) = 2^x$ | 3. $f_3(x) = x^5$ | 5. $f_5(x) = xe^x$ |
| 2. $f_2(x) = \ln(3x)$ | 4. $f_4(x) = 4x^{15}$ | 6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x}$ |

Solución:

$$\ln(3x) < \sqrt[3]{x} < x^5 < 4x^{15} < 2^x < xe^x$$

Ejercicio 15 (Cocientes de infinitos) Calcular los siguientes límites.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + \ln x }{7x^2 + \sqrt{ x }}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-1} - x^3}{-x^2 + \ln(x+5)}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 1}{x^3 + e^{-x}}$ |
|--|--|--|

Ejercicio 16 (Continuidad)

Para las siguientes funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ siendo D el máximo dominio de definición, indicar si f es continua en el punto x indicado.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, si $x \neq 1$, y $f(1) = -2$ en $x = 1$.

Solución:

Observar que tanto el denominador como el numerador se anulan en 1, si factorizamos obtenemos $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$ y como $f(1) = -2$ concluimos que f es continua en $x = 1$.

2. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ en $x = 3$.

Solución:

La función f no está definida en $x = 3$ por lo que no es continua en $x = 3$.

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$, si $x \neq 1$, y $f(1) = 0$ en $x = 1$.

Solución:

Como vimos en la parte 4 del ejercicio 9, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = -1/2$ y como $f(1) = 0$ concluimos que f no es continua en $x = 1$.

4. $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ en $x = 1$.

Solución:

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} = 0 = f(1)$, por lo que f es continua en $x = 1$.

5. $f(x) = e^{x^3-1}$ en $x = 0$.

Solución:

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^3-1} = e^{-1} = f(0)$, por lo que f es continua en $x = 0$.

6. $f(x) = e^{\text{sen}(x-2)}$ en $x = 2$.

Solución:

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\text{sen}(x-2)} = 1 = f(2)$, por lo que f es continua en $x = 2$.

7. $f(x) = \ln(x^2)$ en $x = 1$.

Solución:

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2) = 0 = f(1)$, por lo que f es continua en $x = 1$.

8. $f(x) = \log(1 + \text{sen}(x - 2))$ en $x = 2$.

Solución:

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 2} \log(1 + \text{sen}(x - 2)) = 0 = f(2)$, por lo que f es continua en $x = 2$.

9. $f(x) = x \text{sen}(x)$ en $x = 0$.

Solución:

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen}(x) = 0 = f(0)$, por lo que f es continua en $x = 0$.

10. $f(x) = \log(x^2) \text{sen}^2(x + 1)$ en $x = 1$.

Solución:

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 1} \log(x^2) \text{sen}^2(x + 1) = 0 = f(1)$, por lo que f es continua en $x = 1$.

Observar que las expresiones que definen a las funciones ya fueron analizadas en ejercicios anteriores.

Ejercicio 17 (Continuidad)

Determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la función f es continua

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + ax + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Vamos a estudiar los límites laterales en el punto de quiebre de la función partida y elegir a para que estos límites coincidan:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 3x + 2 = 1 + 3 + 2 = 6; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + ax + 1 = 2a + 1.$$

Por lo tanto cualquier valor que cumplan que $2a + 1 = 6$, es decir $a = 5/2$ define una función f continua.

$$2. f(x) = \begin{cases} \log(x + 1) & \text{si } x > 0 \\ (x + a)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a)^2 = a^2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x + 1) = \log(1) = 0;$$

Por lo tanto a debe valer cero.

$$3. f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax - 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En este caso debemos analizar los límites laterales en dos puntos de quiebre (1 y 2):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\pi x) = \sin(\pi) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} ax - 4 = a - 4.$$

Tenemos entonces una primer condición $a - 4 = 0$.

Por otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 4 = 2a - 4; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4.$$

La segunda condición es $2a - 4 = 4$. Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta que la solución es $a = 4$.

$$4. f(x) = \begin{cases} 2 \cos(x) & \text{si } x \leq \pi \\ ax^2 - a & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

En este caso tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \cos(x) = 2 \cos(\pi) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} ax^2 - a = a\pi^2 - a$$

Por lo tanto $a\pi^2 - a = -2$, es decir $a = \frac{-2}{\pi^2 - 1}$ define una función f continua.

Ejercicio 18 (Teorema de Bolzano (TB))

Recordamos el enunciado del TB:

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo diferente, entonces existe por lo menos un punto entre a y b para el cual $f(c) = 0$.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + e^x - 4$ y los intervalos $I = [-3, -1]$ y $J = [0, 3]$.

Indicar la opción correcta:

1. f está en las hipótesis del TB en I y en J .
2. f está en las hipótesis del TB en I pero no en J .
3. f está en las hipótesis del TB en J pero no en I .
4. f no está en las hipótesis del TB ni para I ni para J .

Solución:

Observemos primero que f es continua en \mathbb{R} y por lo tanto lo es en cualquier intervalo contenido en \mathbb{R} .

La función f está en las hipótesis del TB en $I = [-3, -1]$ si $f(-3)$ y $f(-1)$ son de distinto signo:

$$f(-3) = 9 + e^{-3} - 4 = 5 + e^{-3} > 0; \quad f(-1) = 1 + e^{-1} - 4 = -3 + e^{-1} < 0 \quad \text{ya que } e^{-1} < 1$$

Por lo tanto f está en las hipótesis del TB en I .

Analógamente, la función f está en las hipótesis del TB en $J = [0, 3]$ si $f(0)$ y $f(3)$ son de distinto signo:

$$f(0) = 0 + e^0 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0; \quad f(3) = 9 + e^3 - 4 = 5 + e^3 > 0.$$

Por lo tanto f está en las hipótesis del TB en J .

En conclusión, la primer opción es la correcta.

Ejercicio 19 (Aplicaciones del Teorema de Bolzano)

1. Demuestre que la ecuación dada $x + 2 \cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.

Solución:

Basta encontrar dos valores a y b tales que la función $f(x) = x + 2 \cos(x)$ cumpla las hipótesis del TB en el intervalo $[a, b]$.

Tomando $a = 0$ tenemos que $f(0) = 2 > 0$ y tomando $b = -\frac{\pi}{2}$ resulta que $f(b) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Además, es evidente que la función es continua en todos los reales.

2. En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n + 1$ y $f(x) = 0$:

a) $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

Solución:

Si $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ entonces f es continua en todos los reales.

Además $f(-5) = -5^5 + 5^5 - 9 = -9 < 0$ y $f(-4) = -4(4^4) + 5(4^4) - 7 = 4^4 - 7 > 0$ por lo tanto, aplicando el teorema de Bolzano en $[-5, -4]$ concluimos que hay una raíz entre -5 y -4 .

b) $x + e^x$

Solución:

Si $f(x) = x + e^x$ entonces f es continua en todos los reales, $f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0$ y $f(0) = 1 > 0$ por lo tanto, aplicando el teorema de Bolzano en $[-1, 0]$ concluimos que hay una raíz entre -1 y 0 .

3. Demostrar que existe un número x tal que:

a) $\sin(x) = x - 1$

Solución:

Tomemos $f(x) = \sin x - x + 1$. Esta función es continua en todos los reales. Luego, $f(\pi) = -\pi + 1 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$ por lo que podemos aplicar el teorema de Bolzano en $[0, \pi]$ y asegurarnos que en ese intervalo hay una raíz α , lo que implica que existe α tal que $\sin(\alpha) = \alpha - 1$.

b) $5 \sin(x) = \cos(x)^2$

Solución:

Tomemos $f(x) = 5 \sin x - \cos(x)^2$. Esta función es continua en todos los reales. Luego, $f(0) = -1 < 0$ y $f(\frac{\pi}{2}) = 5 > 0$ por lo tanto podemos aplicar el teorema de Bolzano en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y asegurarnos que en ese intervalo hay una raíz β lo que implica que existe β tal que $5 \sin(\beta) = \cos(\beta)^2$.

c) $\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$

Solución:

Tomemos $f(x) = \sqrt{x-5} - \frac{1}{x+3}$. Esta función es continua en todos su dominio ($x \geq 5$). Luego, $f(5) = -\frac{1}{8} < 0$ y $f(14) = 3 - \frac{1}{17} > 0$ por lo tanto podemos aplicar el teorema de Bolzano en $[5, 14]$ y asegurarnos que en ese intervalo hay una raíz γ , lo que implica que existe γ tal que $\sqrt{\gamma-5} = \frac{1}{\gamma+3}$.

4. Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$:

$$x \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) - 5 = \log(x) - e^x$$

Solución:

Tomemos la función $f(x) = x \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) - 5 - \log(x) + e^x$. Observemos que dicha función es continua en $[1, +\infty)$, en particular es continua en $[1, 2]$. Además $f(1) = 1 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - 5 + e = -\frac{11}{2} + e < 0$ y $f(2) = 2(1) - 5 - \log(2) + e^2 = -3 - \log(2) + e^2 > 0$, por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Bolzano y concluir que la ecuación $x \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) - 5 = \log(x) - e^x$ tiene solución en el intervalo $(1, 2)$.