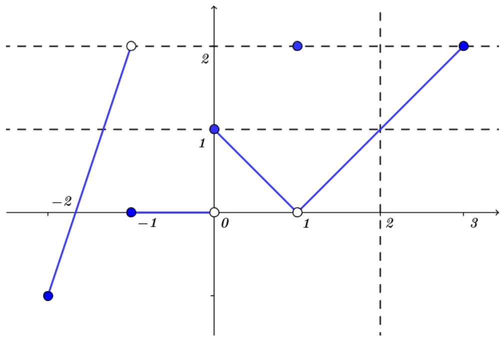
Soluciones Práctico 8: Límites y continuidad

Ejercicio 1 (Cálculo gráfico de límites)
Dada la gráfica:



1. *Determinar:*

   a) $g(-2) = -1$ c) $g(0) = 1$ e) $g(2) = 1$

   b) $g(-1) = 0$ d) $g(1) = 2$ f) $g(3) = 2$

2. *Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra arriba o explique por qué no existen:*

   a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$
   Solución: *Este límite no existe ya que* $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = 0$

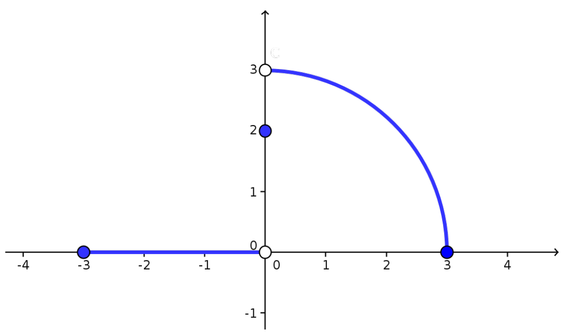
   b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
   Solución: *Este límite no existe ya que* $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$
   Solución: *El límite es* $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$

   d) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$
   Solución: *El límite es* $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 1.$

Ejercicio 2 (Cálculo gráfico de límites laterales)
A partir de la función cuya gráfica se muestra calcular:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



Solución:
Se observa que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *no existe ya que* $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

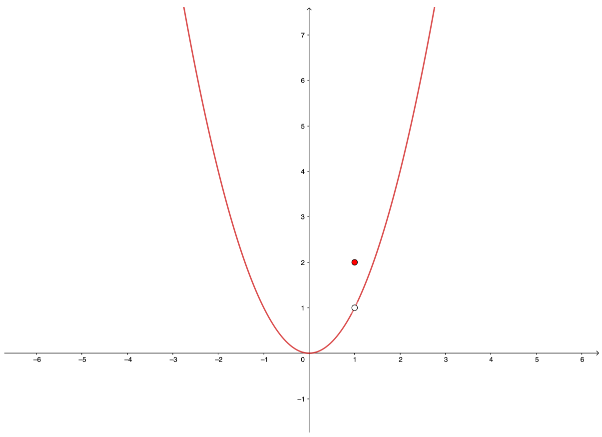
Ejercicio 3 (Límites laterales)

1. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \neq 1, \\ 2 & si\ x = 1. \end{cases}$

   Graficar f *y hallar:*

   a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

   Solución:



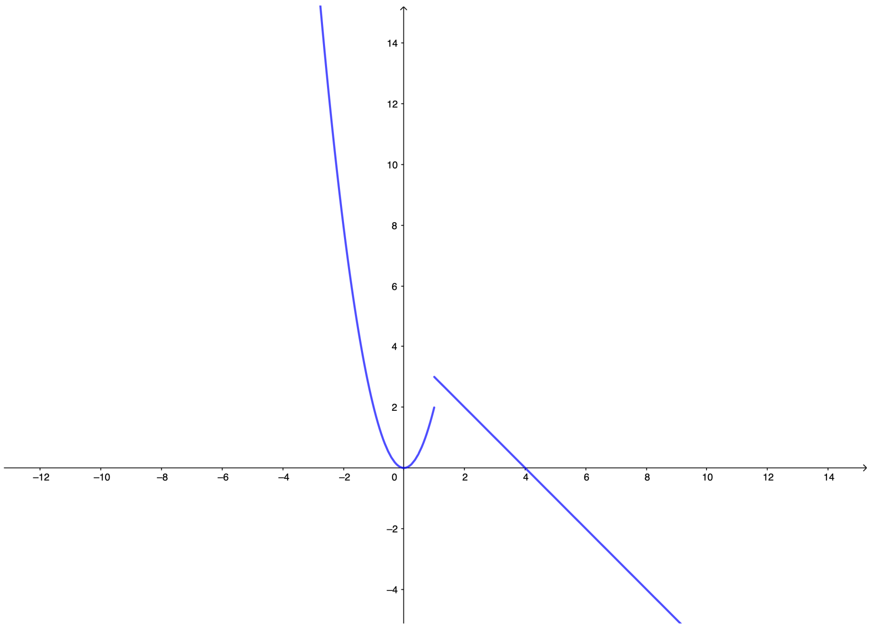
   Se observa que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$ *y teniendo en cuenta que ambos coinciden* $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.
   ¿Qué sucede con los límites anteriores si f *no está definida en* $x = 1$*?*
   Solución:
   Los límites anteriores darían lo mismo ya que en la definición de límite de $f(x)$ *cuando* x *tiende a* b $\left(\lim_{x\to b} f(x)\right)$ *no se toma en cuenta lo que ocurre en el punto* b.

2. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & si\ x < 1, \\ 4 - x & si\ x \geq 1. \end{cases}$

   Graficar f *y hallar:*

   a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Solución:



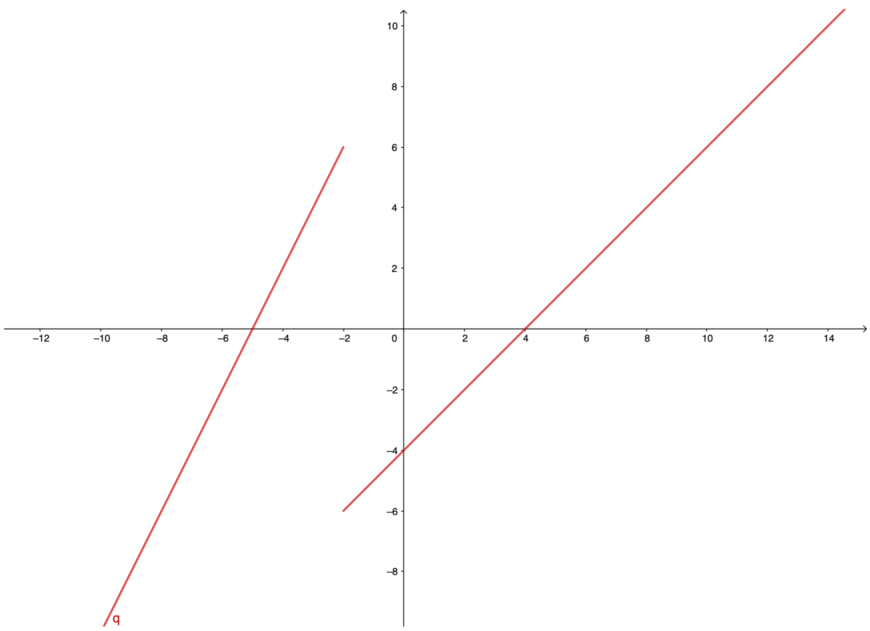
Se observa que $\lim_{x\to 1^+} 4-x = 3$, $\lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2$ *y teniendo en cuenta que* $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, *concluimos que* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *no existe.*

3. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} 2x+10 & si\ x \leq -2, \\ -4+x & si\ x > -2. \end{cases}$

   Graficas f *y hallar:*

   a) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$
   b) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$
   c) $\lim_{x\to -2} f(x)$.

Solución:



Se observa que $\lim\limits_{x\to -2^+} -4+x=-6$, $\lim\limits_{x\to -2^-} 2x+10=6$ *y teniendo en cuenta que* $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, *concluimos que* $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ *no existe.*

Ejercicio 4 (Operaciones con límites)
Calcular los siguientes límites, indicando las propiedades de las operaciones con límites utilizadas:

1. $\lim\limits_{x\to 4} 5x^2-2x+3$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 4} 5x^2-2x+3 = 5\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)-2\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)+3 = 5\times 4\times 4-2\times 4+3=75$

   En este caso hemos usado: si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=F$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=G$ *con* $F,G\in\mathbb{R}$ *entonces:*

   - $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=F+G$
   - $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=F.G$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+4x-3)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to -1} x\right)-2}{\left(\lim\limits_{x\to -1} x^2\right)+4\left(\lim\limits_{x\to -1} x\right)-3} = \frac{-1-2}{1-4-3}=\frac{1}{2}.$

   En este caso hemos usado, además de las dos propiedades del ejercicio anterior:

   - $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{F}{G}$ *si* $G\neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to -2} x^3\right)+2\left(\lim\limits_{x\to -2} x^2\right)-1}{5+3\left(\lim\limits_{x\to -2} x\right)} = \frac{-8+8-1}{5+6}=\frac{-1}{11}.$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x+2}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-6)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x^2\right)+\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)-6}{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)+2} = \frac{4+2-6}{2+2}=0.$

   Observamos que el límite del denominador no puede ser 0 *y podemos aplicar la propiedad del cociente de los límites.*

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$.

   Solución:

   En este caso el límite del denominador es 0 *por lo que no podemos usar la propiedad del límite del cociente. Observamos que* $\lim\limits_{x\to 0}(2+x)^3-8=0$ *por lo que podemos factorizar esta expresión.*

   Factorizando, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x^2+6x+12)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+6x+12)=12.$

6. $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7}$.

Solución:

En este caso el límite del denominador es 0 *por lo que no podemos usar la propiedad del límite del cociente. Observamos que* $\lim_{x\to 7} \sqrt{x+2} = 3$. *Ahora analizaremos* $\lim_{x\to 7}(x-7)$.

A partir del signo de $(x-7)$ *podemos observar que:*

$\lim_{x\to 7^+} (x-7) = 0^+$ *y que* $\lim_{x\to 7^-} (x-7) = 0^-$.

Luego, $\lim_{x\to 7^+} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} = +\infty$ *mientras que* $\lim_{x\to 7^-} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7} = -\infty$.

Ejercicio 5 (Operaciones con límites) *Asumiendo que existe, calcular para los siguientes ejemplos* $\lim_{x\to a} f(x)$

1. $\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)}{5} = 1$.

Solución:

Como $\lim_{x\to 3} f(x)$ *existe, entonces:* $\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)}{5} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 3} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{5}{2}$.

2. $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.

Solución:

Como el $\lim_{x\to -2} f(x)$ *existe y* $\lim_{x\to -2} x^2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\lim_{x\to -2} f(x)}{\lim_{x\to -2} x^2} = \frac{\lim_{x\to -2} f(x)}{4} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = 4$.

3. $\lim_{x\to 2} f(x)^2 - 6f(x) + 2 = -7$.

Solución:

Si llamamos L al $\lim_{x\to a} f(x)$ *tenemos que:*

$$\lim_{x\to 2} f(x)^2 - 6f(x) + 2 = \left(\lim_{x\to 2} f(x)\right)^2 - 6\left(\lim_{x\to 2} f(x)\right) + 2 = L^2 - 6L + 2 = -7 \Leftrightarrow L = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 3.$$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Solución:

Observamos en este caso que, como el límite del denominador es 0, *no podemos usar la propiedad del cociente de los límites. Por otra parte si* $\lim_{x\to 0} f(x) = L \neq 0$ *los resultados posibles de* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$ *serían* $+\infty$ *o* $-\infty$. *Por lo tanto* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

5. $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$.

Solución:

Análogamente al ejercicio anterior, para que $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$, *se debe cumplir que* $\lim_{x\to 2}(f(x)-5) = 0$. *Por lo tanto* $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)} = 1.$

   Solución:

   En este caso, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq 0$ *pues de serlo,* $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2f(x)-x}$ *no estaría definido. Luego, podemos usar las propiedades del cociente de límites:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2f(x)-x}}{\lim\limits_{x\to 1} f(x)} = \frac{\sqrt{2\lim\limits_{x\to 1} f(x) - \lim\limits_{x\to 1} x}}{\lim\limits_{x\to 1} f(x)}$$

   Llamemos L al $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

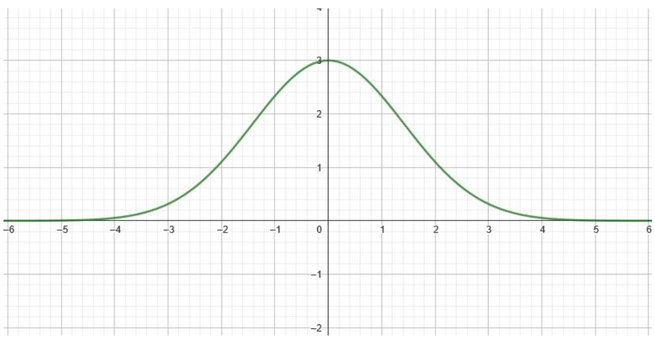
$$\frac{\sqrt{2L-1}}{L} = 1 \Leftrightarrow 2L-1 = L^2 \Leftrightarrow L = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Ejercicio 6 (Interpretación gráfica de límite)

1. *Dibujar el gráfico de una función f que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:*

   - $f(0) = 3$
   - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

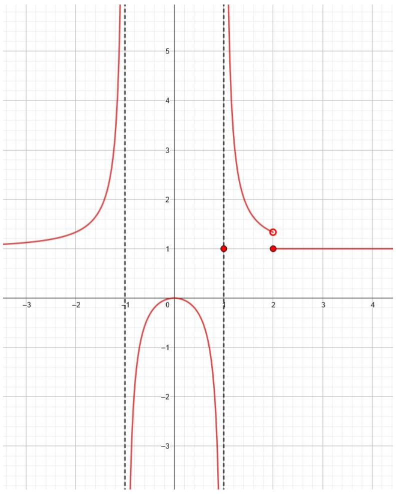
   Solución:



2. *Dibujar el gráfico de una función f que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:*

- $f(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

Solución:



Ejercicio 7 (Límites con cociente de polinomios)

1. *Determinar existencia y calcular los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 5$;

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x+2}{x^2+4} = \frac{1}{2}$;

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Solución:

En este caso, como se trata de cociente de expresiones polinómicas en las que el límite de numerador y denominador son 0, factorizamos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2.$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$.

Solución:

Análogo al ejercicio anterior

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-2x)}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x-1} = 0.$$

e) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$

Solución:

Análogo al ejercicio anterior

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a} x + a = 2a.$$

2. *Consideremos las funciones:*

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ $\qquad h(x) = \frac{x^8-1}{x^5-x}$

a) *Asumiendo que existen, calcular los límites:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 7) $\lim\limits_{x\to-1} h(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 6) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ 9) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

Solución:

Observar que factorizando, obtenemos que siempre que $x \neq 1$ $f(x) = x+1$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$ *y si además* $x \neq -1$, $h(x) = \frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x}$, *de donde se sigue:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ 7) $\lim\limits_{x\to-1} h(x) = -2$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ 6) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -1/2$ 9) $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2$

b) *Revisar los resultados en en la siguiente aplicación Geogebra.*

Ejercicio 8 (Límites con valor absoluto)
Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to-4} |x+4| = 0^+$;

2. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$.

   Solución:

   Distingamos dos casos:

   - $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$
   - $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$

   Entonces: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ *no existe.*

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = 0$.

5. $\lim\limits_{x\to 3/2} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$.

   Solución:

   Distingamos dos casos:

   - $\lim\limits_{x\to 3/2^+} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} = \lim\limits_{x\to 3/2^+} \frac{x(2x-3)}{(2x-3)} = \lim\limits_{x\to 3/2^+} x = \frac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 3/2^-} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|} = \lim\limits_{x\to 3/2^-} \frac{x(2x-3)}{-(2x-3)} = \lim\limits_{x\to 3/2^-} -x = -\frac{3}{2}$

Entonces: $\lim\limits_{x\to 3/2} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$ *no existe.*

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 9 (Límites con radicales)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x-1}+1 = 2$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-x)}{(x-1)}\frac{\left(\sqrt{x}+x\right)}{\left(\sqrt{x}+x\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-x^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+x\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(1-x)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+x\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-x}{\sqrt{x}+x} = -\frac{1}{2}.$
5. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\frac{\left(\sqrt{x+2}+3\right)}{\left(\sqrt{x+2}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{x+2-9}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{1}{6}.$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

   Solución:

   $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(x^2-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1)\left(\sqrt{x}+1\right) = 4.$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 10 (Límites con exponencial y logaritmo)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to -1} e^{x^3-1} = e^{-2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} = e-1$;
3. $\lim\limits_{x\to 2} e^{\operatorname{sen}(x-2)} = 1$;
4. $\lim\limits_{x\to 1} \log(x^2) = 0$;
5. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(\sqrt{x+3}) - \ln(\sqrt{x}) = ln(2)$;
6. $\lim\limits_{x\to 2} \log(1+\operatorname{sen}(x-2)) = 0$.

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 11 (Límites con trigonométricas)

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}(x) = 0$;
2. $\lim_{x\to 1} (x^3-1)(1+\mathrm{sen}(2x)) = 0$;
3. $\lim_{x\to 2} (x^4-2x^3)cos(x^2) = 0$;
4. $\lim_{x\to 1} \log(x^2)\,\mathrm{sen}^2(x+1) = 0$.

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 12 (Existencia y operaciones con límites) *Probar por medio de un ejemplo que:*

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ *puede existir aún cuando no exista* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ni* $\lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}(f.g)(x)$ *puede existir aún cuando no exista* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ni* $\lim_{x\to a} g(x)$.

Solución:
En este caso un ejemplo sencillo que podemos usar para ambos ejercicios puede ser:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq 0 \\ -1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Observamos que: $\lim_{x\to 0} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0} g(x)$ *no existen.*
Si se considera la suma de las funciones tenemos que $(f+g)(x) = 0$. *Entonces* $\lim_{x\to 0}(f+g)(x) = 0$.
Si consideramos ahora el producto de las funciones, $(f.g)(x) = -1$. *Entonces,* $\lim_{x\to 0}(f.g)(x) = -1$.

Ejercicio 13 (Infinitésimos equivalentes)

1. *Dadas dos funciones reales f y g, decimos que f y g son infinitésimos en $x = a$ si:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

*Decimos además, que son **infinitésimos equivalentes** si:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Con la ayuda de la siguiente aplicación Geogebra de análisis de límite puntual, determinar si las siguientes son infinitésimos equivalentes en $x = 0$:

a) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *y* $g(x) = x$
SI

b) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *y* $g(x) = x^2$
NO

c) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *y* $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$
NO

d) $f(x) = \cos(x)$ *y* $g(x) = x$
NO

e) $f(x) = \cos(x)$ *y* $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$
SI

f) $f(x) = \ln(1+x)$ *y* $g(x) = x$
SI

g) $f(x) = \ln(1+x)$ *y* $g(x) = \mathrm{sen}(x)$
SI

h) $f(x) = e^x$ *y* $g(x) = 1+x$
SI

2. *A partir del ejercicio anterior calcular:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(sin(x))^4}{4} - (cos(x))^2}{e^{3x} + \ln(1+2x)}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(sin(x))^4}{4} - (cos(x))^2}{e^{3x} + \ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2}{1+3x+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} - \frac{4-4x^2+x^4}{4}}{1+5x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4-4x^2}{4}}{1+5x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1} = -1.$$

Ejercicio 14 (Órdenes de infinito) *Supongamos f y g dos funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Decimos que f ***es un infinito de orden superior a*** *g (y escribimos $g \prec f$) si*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Con la siguiente aplicación Geogebra, ordenar las siguientes funciones según los órdenes de infinitos:

1. $f_1(x) = 2^x$
2. $f_2(x) = \ln(3x)$
3. $f_3(x) = x^5$
4. $f_4(x) = 4x^{15}$
5. $f_5(x) = xe^x$
6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución:

$$\ln(3x) \prec \sqrt[3]{x} \prec x^5 \prec 4x^{15} \prec 2^x \prec xe^x$$

Ejercicio 15 (Cocientes de infinitos) *Calcular los siguientes límites.*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+ln|x|}{7x^2+\sqrt{|x|}}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}-x^3}{-x^2+ln(x+5)}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+1}{x^3+e^{-x}}$

Ejercicio 16 (Continuidad)
Para las siguientes funciones $f : D \to \mathbb{R}$ siendo D el máximo dominio de definición, indicar si f es continua en el punto x indicado.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, *si $x \neq 1$, y $f(1) = -2$ en $x = 1$.*

   Solución:

   Observar que tanto el denominador como el denominadorr se anulan en 1, si factorizamos obtenemos $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$ *y como $f(1) = -2$ concluimos que f es continua en $x = 1$.*

2. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ *en $x = 3$.*

   Solución:

   La función f no está definida en $x = 3$ por lo que no es continua en $x = 3$.

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$, *si $x \neq 1$, y $f(1) = 0$ en $x = 1$.*

   Solución:

   Como vimos en la parte 4 del ejercicio 9, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = -1/2$ *y como $f(1) = 0$ concluimos que f no es continua en $x = 1$.*

4. $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ *en $x = 1$.*

   Solución:

   Observamos que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} = 0 = f(1)$, *por lo que f es continua en $x = 1$.*

5. *$f(x) = e^{x^3-1}$ en $x = 0$.*

   Solución:

   Observamos que $\lim\limits_{x\to 0} e^{x^3-1} = e^{-1} = f(0)$, por lo que f es continua en $x = 0$.

6. *$f(x) = e^{\operatorname{sen}(x-2)}$ en $x = 2$.*

   Solución:

   Observamos que $\lim\limits_{x\to 2} e^{\operatorname{sen}(x-2)} = 1 = f(2)$, por lo que f es continua en $x = 2$.

7. *$f(x) = \ln(x^2)$ en $x = 1$.*

   Solución:

   Observamos que $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x^2) = 0 = f(1)$, por lo que f es continua en $x = 1$.

8. *$f(x) = \log(1 + \operatorname{sen}(x-2))$ en $x = 2$.*

   Solución:

   Observamos que $\lim\limits_{x\to 2} \log(1 + \operatorname{sen}(x-2)) = 0 = f(2)$, por lo que f es continua en $x = 2$.

9. *$f(x) = x\operatorname{sen}(x)$ en $x = 0$.*

   Solución:

   Observamos que $\lim\limits_{x\to o} x\operatorname{sen}(x) = 0 = f(0)$, por lo que f es continua en $x = 0$.

10. *$f(x) = \log(x^2)\operatorname{sen}^2(x+1)$ en $x = 1$.*

    Solución:

    Observamos que $\lim\limits_{x\to 1} \log(x^2)\operatorname{sen}^2(x+1) = 0 = f(1)$, por lo que f es continua en $x = 1$.

Observar que las expresiones que definen a las funciones ya fueron analizadas en ejercicios anteriores.

Ejercicio 17 (Continuidad)
Determinar para que calores de $a \in \mathbb{R}$ la función f es continua

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & si\ x \leq 1 \\ ax^2 + ax + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$

   Solución:

   Vamos a estudiar los límites laterales en el punto de quiebre de la función partida y elegir a para que estos límites coincidan:

   $$\lim_{x\to 1^-} x^2 + 3x + 2 = 1 + 3 + 2 = 6; \qquad \lim_{x\to 1^+} ax^2 + ax + 1 = 2a + 1.$$

   Por lo tanto cualquier valor que cumplan que $2a + 1 = 6$, es decir $a = 5/2$ define una función f continua.

2. $f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & si\ x > 0 \\ (x+a)^2 & si\ x \leq 0 \end{cases}$

   Solución:

   $$\lim_{x\to 0^-} \log(x+1) = \log(1) = 0; \qquad \lim_{x\to 0^+} (x+a)^2 = a^2.$$

   Por lo tanto a debe valer cero.

3. $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & si\ x < 1 \\ ax - 4 & si\ 1 \le x \le 2 \\ x^2 & si\ x > 2 \end{cases}$

En este caso debemos analizar los límites laterales en dos puntos de quiebre (1 y 2):

$$\lim_{x\to 1^-} \sin(\pi x) = \sin(\pi) = 0; \qquad \lim_{x\to 1^+} ax - 4 = a - 4.$$

Tenemos entonces una primer condición $a - 4 = 0$.

Por otro lado:

$$\lim_{x\to 2^-} ax - 4 = 2a - 4; \qquad \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4.$$

La segunda condición es $2a - 4 = 4$. Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta que la solución es $a = 4$.

4. $f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & si\ x \le \pi \\ ax^2 - a & si\ x > \pi \end{cases}$

En este caso tenemos:

$$\lim_{x\to \pi^-} 2\cos(x) = 2\cos(\pi) = -2$$

$$\lim_{x\to \pi^+} ax^2 - a = a\pi^2 - a$$

Por lo tanto $a\pi^2 + a = -2$, es decir $a = \frac{-2}{\pi^2+1}$ define una función f continua.

Ejercicio 18 (Teorema de Bolzano (TB))

Recordamos el enunciado del TB:

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo diferente, entonces existe por lo menos un punto entre a y b para el cual $f(c) = 0$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + e^x - 4$ y los intervalos $I = [-3,-1]$ y $J = [0,3]$.

Indicar la opción correcta:

1. *f está en las hipótesis del TB en I y en J.*
2. *f está en las hipótesis del TB en I pero no en J.*
3. *f está en las hipótesis del TB en J pero no en I.*
4. *f no está en las hipótesis del TB ni para I ni para J.*

Solución:

Observemos primero que f es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto lo es en cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}$.

La función f está en las hipótesis del TB en $I = [-3,-1]$ si $f(-3)$ y $f(-1)$ son de distinto signo:

$$f(-3) = 9 + e^{-3} - 4 = 5 + e^{-3} > 0; \qquad f(-1) = 1 + e^{-1} - 4 = -3 + e^{-1} < 0 \quad \textit{ya que } e^{-1} < 1$$

Por lo tanto f está en las hipótesis del TB en I.

Analógamente, la función f está en las hipótesis del TB en $J = [0,3]$ si $f(0)$ y $f(3)$ son de distinto signo:

$$f(0) = 0 + e^0 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0; \qquad f(3) = 9 + e^3 - 4 = 5 + e^3 > 0.$$

Por lo tanto f está en las hipótesis del TB en J.

En concluisión, la primer opción es la correcta.

Ejercicio 19 (Aplicaciones del Teorema de Bolzano)

1. *Demuestre que la ecuación dada $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.*

   Solución:

   Basta encontrar dos valores a y b tales que la función $f(x) = x + 2\cos(x)$ cumpla las hipótesis del TB en el intervalo $[a, b]$.

   Tomando $a = 0$ tenemos que $f(0) = 2 > 0$ y tomando $b = -\frac{\pi}{2}$ resulta que $f(b) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Además, es evidente que la función es continua en todos los reales.

2. *En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n+1$ y $f(x) = 0$:*

   a) $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

   Solución:
   Si $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ entonces f es continua en todos los reales.
   Además $f(-5) = -5^5 + 5^5 - 9 = -9 < 0$ y $f(-4) = -4(4^4) + 5(4^4) - 7 = 4^4 - 7 > 0$ por lo tanto, aplicando el teorema de Bolzano en $[-5, -4]$ concluimos que hay una raíz entre -5 y -4.

   b) $x + e^x$

   Solución:
   Si $f(x) = x + e^x$ entonces f es continua en todos los reales, $f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0$ y $f(0) = 1 > 0$ por lo tanto, aplicando el teorema de Bolzano en $[-1, 0]$ concluimos que hay una raíz entre -1 y 0.

3. *Demostrar que existe un número x tal que:*

   a) $\sin(x) = x - 1$

   Solución:
   Tomemos $f(x) = \sin x - x + 1$. Esta función es continua en todos los reales. Luego, $f(\pi) = -\pi + 1 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$ por lo que podemos aplicar el teorema de Bolzano en $[0, \pi]$ y asegurarnos que en ese intervalo hay una raíz α, lo que implica que existe α tal que $\sin(\alpha) = \alpha - 1$.

   b) $5\sin(x) = \cos(x)^2$

   Solución:
   Tomemos $f(x) = 5\sin x - \cos(x)^2$. Esta función es continua en todos los reales. Luego, $f(0) = -1 < 0$ y $f(\frac{\pi}{2}) = 5 > 0$ por lo tanto podemos aplicar el teorema de Bolzano en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y asegurarnos que en ese intervalo hay una raíz β lo que implica que existe β tal que $5\sin(\beta) = \cos(\beta)^2$.

   c) $\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$

   Solución:
   Tomemos $f(x) = \sqrt{x-5} - \frac{1}{x+3}$. Esta función es continua en todos su dominio ($x \geq 5$). Luego, $f(5) = -\frac{1}{8} < 0$ y $f(14) = 3 - \frac{1}{17} > 0$ por lo tanto podemos aplicar el teorema de Bolzano en $[5, 14]$ y asegurarnos que en ese intervalo hay una raíz γ, lo que implica que existe γ tal que $\sqrt{\gamma - 5} = \frac{1}{\gamma+3}$.

4. *Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo (1,2):*

   $$x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$$

   Solución:

   Tomemos la función $f(x) = x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 - \log(x) + e^x$. Observemos que dicha función es continua en $[1, +\infty)$, en particular es contiua en $[1, 2]$. Además $f(1) = 1(\frac{1}{2} - 1) - 5 + e = \frac{-11}{2} + e < 0$ y $f(2) = 2(1) - 5 - \log(2) + e^2 = -3 - log(2) + e^2 > 0$, por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Bolzano y concluir que la ecuación $x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$ tiene solución en el intervalo $(1, 2)$.