Facultad de Igeniería - IMERL - Ecuaciones Diferenciales - Curso 2008.

Resolución del primer parcial del año 2007.

1. (a) Si $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ entonces:

$$e^{At} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6e^{-4t} - e^{t} & 3e^{t} - 3e^{-4t} \\ 2e^{-4t} - 2e^{t} & 6e^{t} - e^{-4t} \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuación deferencial $\dot{X} = AX,\ X(0) = (x_0, y_0)$ es:

$$\begin{aligned} \varphi(t,(x_0,y_0)) = e^{At}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{5}(3y_0 - x_0)e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}e^{-4t}(2x_0 - y_0)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\left(e^{t}(3y_0 - x_0) + e^{-4t}(2x_0 - y_0),\ e^{t}(6y_0 - 2x_0) + e^{-4t}(2x_0 - y_0)\right). \end{aligned}$$

(b) Para el diagarma de fases se tiene en cuenta que los vectores propios de A con valores propios respectivos son: $(1,2),\ (3,1)$ y $1,\ -4$.

(c) La solución por el origen es inestable, y por lo tanto no es asintóticamente estable, pues existe un valor propio positivo (resultado visto en práctico). Si quisiéramos demostrarlo sin utilizar este resultado, alcanzaría probar que para cualquier $\delta > 0$ existe un vector (x_0, y_0) tal que $\|(x_0,y_0)\| < \delta$, y $\lim_{t\to+\infty} \|\varphi(t,(x_0,y_0))\| = +\infty$.

Dado $\delta > 0$, elegimos el vector propio asociado a 1: $(\delta/3, 2\delta/3)$. Por un lado $\|(\delta/3, 2\delta/3)\| = \sqrt{\frac{5}{9}}\delta < \delta$, y por otro $\lim_{t\to+\infty} \|\varphi(t,(\delta/3,2\delta/3))\| = \lim_{t\to+\infty} \|e^{t}(\delta/3,2\delta/3)\| = \lim_{t\to+\infty} e^{t}\frac{\delta}{3}\sqrt{5} = +\infty$.

2. (a) Ver los apuntes de teórico.

(b) Veamos que la función f es continua en $x_0 \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ (se puede por la definición de convergencia uniforme). Para el n de antes tenemos que f_n es continua en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que: si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, si $|x - x_0| < \delta$ tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + 2\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

Hemos probado que f es continua.

(c) i Dado $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se cumple que $|\sin(x)| < 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} (\sin(x))^n = 0$. Entonces el límte puntual de la sucesión $\{f_n\}$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es la función nula (la llamaremos g).

ii Como la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, los límites puntuales son únicos, y por la parte anterior, si $\{f_n\}$ converge uniformemente a alguna función entonces converge uniformemente a g. Sin embargo se tiene que:

$$\sup_{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}} |f_n(x) - g(x)| = \sup_{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}} |(\sin(x))^n| \geqslant \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\sin(x))^n = 1.$$

Por lo tanto es falso que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}} |f_n(x) - g(x)| = 0.$$

O sea que la sucesión no converge uniformemente.

(d) i Dado $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ se tiene que $F_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (\sin(x))^i = \dfrac{1-(\sin(x))^{n+1}}{1-\sin(x)}$.

Para los x elegidos antes se cumple que $|\sin(x)| < 1$ y por lo tanto:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(\sin(x))^{n+1}}{1-\sin(x)} = \frac{1}{1-\sin(x)}.$$

O sea que el límite puntual de la sucesión $\{F_n\}$ es $h : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, y está dada por $h(x) = \dfrac{1}{1-\sin(x)}$.

ii Razonando como en la parte (c) ii. :

$$\sup_{0<x<\frac{\pi}{2}} |F_n(x) - h(x)| = \sup_{0<x<\frac{\pi}{2}} \left|\frac{(\sin(x))^{n+1}}{1-\sin(x)}\right| \geqslant \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left|\frac{(\sin(x))^{n+1}}{1-\sin(x)}\right| = +\infty.$$

Por lo tanto la sucesión de funciones $\{F_n\}$ no converge uniformemente en $(0, \frac{\pi}{2})$.

3. (a) Si $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ entonces la solución general es:

$$\varphi(t, (x_0, y_0, z_0)) = \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^t(1, -1, 0) + \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{-t}(1, 1, 0) + z_0 e^{\alpha t}(0, 0, 1).$$

(b) Para el caso $\alpha > 0$ el único valor propio con parte real negativa es el -1 y tiene multiplicidad algebraica 1. Por lo tanto E^s es el subespacio propio asociado al valor propio -1, o sea $E^s = \{(x, x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\}$. Por otro lado, si $\varphi(0) \in E^s$ entonces $\varphi(0)$ es un vector propio asociado a -1. Por lo tanto $\varphi(t) = e^{-t}\varphi(0)$, entonces $\varphi(t) \in E^s \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.

(c) Para discutir la estabilidad de las soluciones basta discutir la estabilidad de la solución con condición inicial 0 porque la ecuación es del tipo $\dot{X} = AX$. Como 1 es valor propio (independientemente del valor de α) las soluciones son inestables hacia el futuro. Para demostrar lo anterior procedemos igual que en la parte (c) del ejercicio 1.

Dado $\delta > 0$ consideramos el vector propio asociado a 1 $(\delta/2, -\delta/2, 0)$. Por un lado $\|(\delta/2, -\delta/2, 0)\| = \delta/\sqrt{2} < \delta$, y por otro:

$$\lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t, (\delta/2, -\delta/2, 0))\| = \lim_{t \to +\infty} \|e^t(\delta/2, -\delta/2, 0))\| = \lim_{t \to +\infty} e^t \delta/\sqrt{2} = +\infty.$$

O sea que las soluciones son inestables para todo valor de α.