Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
Solución segundo parcial

18 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1.

Como para $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ se cumple que $-1 < \cos(x) < 0$ y $0 < \operatorname{sen}(x) < 1$ entonces $f_n(x) = (\cos(x))^n$ y $g_n(x) = (\operatorname{sen}(x))^n$ convergen puntualmente a la función nula.
Además se cumple que

$$\sup_{x\in(\frac{\pi}{2},\pi)} |(\cos(x))^n| = \sup_{x\in(\frac{\pi}{2},\pi)} |(\operatorname{sen}(x))^n| = 1.$$

Por lo tanto no hay convergencia uniforme para ninguna de las sucesiones. La opción correcta es (D).

Ejercicio 2.

Consideramos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $F(x + 2\pi) = F(x)$, F par y tal que $F(x) = -x + \pi$ para todo $x \in [0, \pi]$ (es decir, F es la extensión par y 2π-periódica de f). Por lo tanto:

$$a_0(F) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-x + \pi)dx = \pi$$

$$a_n(F) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-x + \pi)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -x\cos(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(nx)dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\operatorname{sen}(nx)x}{n} - \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi\operatorname{sen}(nx)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right).$$

$b_n(F) = 0$, por ser F par. Luego por el teorema de Dini, tenemos que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(F))\cos(nx) = -x + \pi \text{ para todo } x \in [0, \pi].$$

Es claro que $a_{2n} = 0$. La opción correcta es (C).

Ejercicio 3.

Ver notas teóricas del curso.

Ejercicio 4.

1. Hay que resolver el sistema $\begin{cases} xy^2 = 0 \\ -yx^2 = 0 \\ -z^3 = 0 \end{cases}$, cuya solución es

$$\{(x, 0, 0) :\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0) :\ y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Sea $(x_0, y_0, 0)$ un punto de equilibrio. Supongamos que es asintóticamente estable. Entonces tiene que existir $\delta > 0$ tal que si φ es un solución con $||\varphi(0)-(x_0, y_0, 0)|| < \delta$ entonces $\lim_{t\to+\infty} ||\varphi(t) - (x_0, y_0, 0)|| = 0$. Como el punto de equilibrio $(x_0, y_0, 0)$ es acumulado por otros puntos de equilibrio, es posible encontrar otro punto de equilibrio $(x_1, y_1, 0)$ con $(x_1, y_1, 0) \neq (x_0, y_0, 0)$ tal que $||(x_1, y_1, 0) - (x_0, y_0, 0)|| < \delta$. Luego $\varphi(t) \equiv (x_1, y_1, 0)$ es solución con $||\varphi(0) - (x_0, y_0, 0)|| < \delta$ y $\lim_{t\to+\infty} ||\varphi(t) - (x_0, y_0, 0)|| \neq 0$. Lo que implica una contradicción.

3. Consideramos la función $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Por lo tanto:

$$\dot{V}(x,y,z) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 2x(xy^2) + 2y(-yx^2) + 2z(-z^3) = -2z^4$$

Aplicando Liapunov 1 y la parte 2), tenemos que el origen es estable pero no asintóticamente estable.

4. Usando Hartman, si consideramos $f(x,y,z) = (xy^2, -yx^2, -z^3)$ se tiene que

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ -2xy & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix} \text{ por lo tanto } J_f(0,y,0) = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como ese jacobiano tiene valor propio $y^2 > 0$, concluimos que cualquier punto crítico de la forma $(0,y,0)$ es inestable.

5. Consideramos la función $V(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2$. Por lo tanto:

$$\dot{V}(x,y,z) = 2(x-1)\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 2(x-1)(xy^2) + 2y(-yx^2) + 2z(-z^3) = -2xy^2 - 2z^4$$

Si $x > 1/2$ se tiene que $-2xy^2 \leq 0$. Sea $U = \{(x,y,z) : x > 1/2\}$. Por lo tanto $\dot{V}(x,y,z) \leq 0$ para todo $(x,y,z) \in U$. Nuevamente, aplicando Liapunov 1 y la parte 2), tenemos que el $(1,0,0)$ es estable poer no asintóticamente estable.

Observación: La función $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $H(x,y,z) = x^2 + y^2$ es una preintegral. Estudiando las superficies de nivel de H se pueden resolver todas las partes de este problema.

Ejercicio 5.

1. Busquemos soluciones de la forma:

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{1}$$

   (a) $u_t = u_{xx} \Rightarrow T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$. En esta última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualado a una función que depende de la posición. De modo que:

$$\frac{d}{dt}\frac{T'}{T}(t) = \frac{d}{dt}\frac{X''}{X}(x) = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T}(t) = \lambda \text{ (cte)} \Rightarrow \frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) = \lambda \text{ (cte)}.$$

   Por lo tanto, podemos obtener el siguiente problema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de una ecuación en derivadas parciales.

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T' - \lambda T = 0. \end{cases}$$

   (b) Como $0 = u(t,0) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) = 0$ o $X(0) = 0$. Si $T(t)$ fuese la función nula tendríamos que $u(t,x) = 0$ la cual no verifica la condición inicial $u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}$. Por lo tanto la opción que nos sirve es $X(0) = 0$.

   (c) $0 = u(t,\pi) = T(t)X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$. Descartamos la opción $T(t) = 0$ por la misma razón que en el caso anterior.

   En resumen:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

   Para la $X'' - \lambda X = 0$, discutiremos según los posibles valores de λ.

- Caso (a): $\lambda > 0$.
  Si $\lambda > 0$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu = \alpha^2$.

  $$\lambda = \alpha^2 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

  Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(\pi) = Ae^{\alpha\pi} + Be^{-\alpha\pi} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } A = B = 0$$

  La primera condición no es válida ya que supusimos $\lambda = \alpha^2 > 0$. La segunda tampoco es válida ya que obtendríamos $X(x) = 0$ lo que resultaría nuevamente en la función $u(t, x) = 0$. Por ende, λ no podrá ser mayor a cero.

- Caso (b): $\lambda = 0$.
  $\lambda = 0$ implica que $X'' = 0$, integrando dos veces, obtenemos que

  $$X(x) = Ax + B$$

  Nuevamente, imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(\pi) = A\pi + B \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

  Nuevamente se obtendría la solución trivial la cual no es válida. Por lo tanto, λ tampoco podrá ser cero.

- Caso(c): $\lambda < 0$.

Si λ es negativo, existe algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda = -\alpha^2$.

$$\lambda = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\operatorname{sen}(\alpha x)$$

Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(\pi) = B\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0 \text{ o } \operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0$$

Si consideramos la primera opción, obtenemos la solución trivial. Si se verificará la segunda opción:

$$\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = n\pi \Rightarrow \alpha = n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow X(x) = B_n \operatorname{sen}(nx).$$

Volviendo a la ecuación $T' - \lambda T = 0$ tenemos que $T(t) = C_n e^{-n^2 t}$.

Nuestra solución al problema sería de la forma:

$$u_n(t, x) = X(x)T(t) = A_n \operatorname{sen}(nx)e^{-n^2 t},\ \text{donde } A_n = B_n C_n.$$

$$u_n(t, x) = A_n \operatorname{sen}(nx)e^{-n^2 t}. \tag{2}$$

Falta imponer la condición $u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}$.

Como

$$u(0, x) = A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}.$$

no es posible hallar A_n que verifique la condición anterior, buscamos un candidato a solución de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}.$$

Entonces

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}, \text{ tomamos } A_n = \frac{1}{n^4}.$$

Luego, un candidato a solución es

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}}{n^4}.$$

2. Vamos a utilizar los siguientes resultados:

Proposición 0.1 (Derivada respecto de t)
Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. *Si:*

- $S_n(t,x)$ *converge uniformemente a* $\sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x)$.
- $S_{n_t}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ *converge uniformemente a* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$.

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x).$$

Observación: Basta con pedir que $S_n(t_0,x_0)$ converja en algún punto (t_0,x_0). No es necesario pedir que $S_n(t,x)$ converja uniformemente.

Proposición 0.2 *Sea* $\{u_n\}$ *una sucesión de funciones* $u_n : X \to \mathbb{R}$ *que verifica:*

- $|u_n(t,x)| \leq M_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $(t,x) \in X$,
- *la serie* $\sum M_n$ *es convergente*

Entonces existe $u : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $\sum u_n$ *converge uniformemente a* u.

Sea $u_n(t,x) = \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}}{n^4}$. Entonces

$$|u_n(t,x)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}.$$

Luego, por la proposición 0.2 , se tiene que $\sum u_n$ converge uniformemente.

Sea $\frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x) = (-n^2) \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}}{n^4}$. Entonces

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x) \right| = \left| (-n^2) \frac{\operatorname{sen}(nx) e^{-n^2 t}}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Luego, aplicando la proposición 0.1, se cumple que $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x)$.