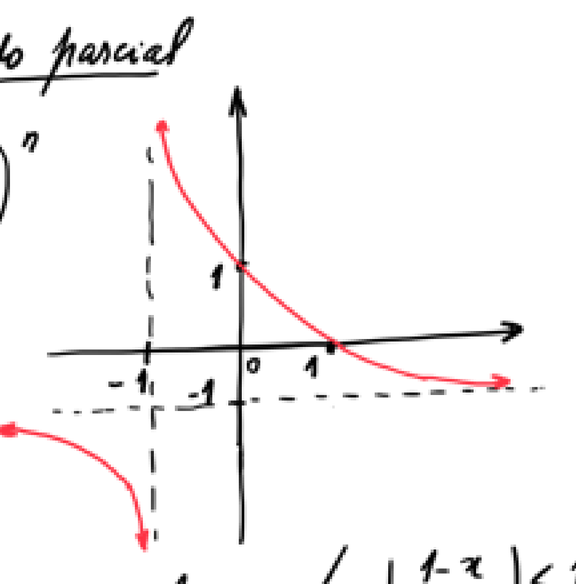
<u>Segundo parcial</u>

1) $a_n = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$



La serie converge para los $x \,/\, \left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$,

entonces $P = \{x \,/\, x > 0\}$

Para que haya convergencia uniforme

a debe ser mayor a 0.

Si $b = +\infty$, entonces $\sup\limits_{x\in[a,b)} \sum\limits_1^\infty a_n(x) = +\infty$

Entonces $b \in \mathbb{R}$, luego.

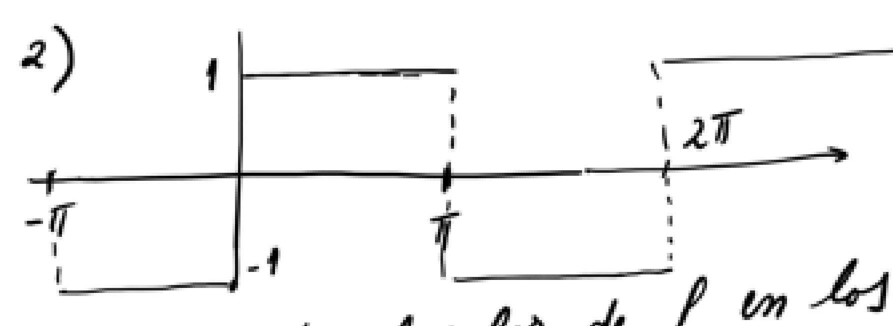
$U = \{(a,b) : a > 0,\ b > a,\ b \in \mathbb{R}\}$, o sea

que los intervalos cerrados donde

hay convergencia uniforme son de

la forma $[a,b]$ con $0 < a < b < +\infty$

2)



No importa el valor de f en los

puntos de la forma $n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

$S_\infty(f) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^\infty a_k \cos(kx) + \sum\limits_{k=1}^\infty b_k \operatorname{sen}(kx)$

$a_k = 0 \quad \forall\, k \geq 0$

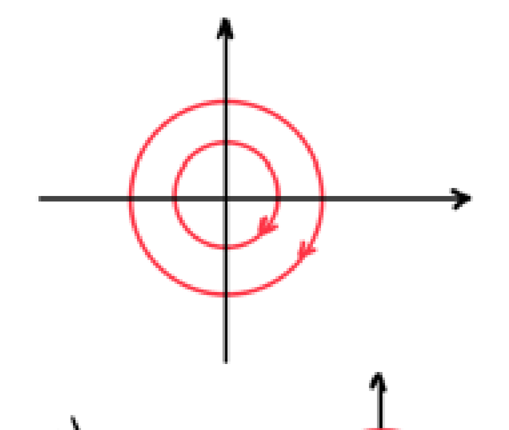
$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} kx = \frac{2}{\pi} \left.\frac{-\cos kx}{k}\right|_0^\pi$

$= -\frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & k = \dot{2} \\ 4/k\pi & k \neq \dot{2} \end{cases}$

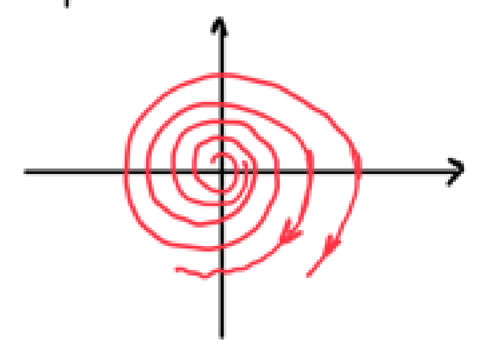
$S_\infty(f) = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen} x + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen} 3x + \cdots$

$+ \frac{4}{(2n+1)\pi}\operatorname{sen}(2n+1)x + \cdots$

3) Sistema linealizado: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$



I)



Ahora la velocidad tiene una componente

radial, por ejemplo la velocidad en

el punto $(1,0)$ tiene dos componentes

como el dibujo:

4) $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$

Si existe V en las condiciones pedidas,

la órbita de equilibrio por el $(0,0)$ sería

asintóticamente estable.

Si $\lambda \geq 0$, como $\dot{x} = \lambda x$, el $(0,0)$ no

sería asintóticamente estable, entonces

$L_\lambda = \emptyset \quad \forall\, \lambda \geq 0$

Sea ahora $\underline{\lambda < 0}$

Como $V(x,y) = ax^2 + by^2$ y $V(x,y) > 0$

$\forall\,(x,y) \neq (0,0)$, entonces $a > 0$ y $b > 0$

$\dot{V} = 2ax\lambda x + 2by(x + \lambda y) =$

$= 2\lambda(ax^2 + by^2) + 2bxy$

$H = \begin{pmatrix} 2\lambda a & b \\ b & 2\lambda b \end{pmatrix}$

La suma de las raíces del polinomio

característico va a ser: $2\lambda(a+b) < 0$

Como necesito que ambas raíces sean

negativas, entonces el producto de las

raíces debe ser positivo.

Entonces $4\lambda^2 ab - b^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{b < 4\lambda^2 a}$

$L_\lambda = \{(a,b) : a > 0,\ b > 0,\ b < 4\lambda^2 a\}$

5) Para este caso, la solución

es de la forma:

$u(t,x) = \sum\limits_1 b_k \operatorname{sen}(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t} + x$

Como $u_0 = u(0,x) = x + 2\operatorname{sen}(\pi x) - 5\operatorname{sen}(7\pi x)$

entonces: $\boxed{u(t,x) = x + 2\operatorname{sen}(\pi x)\, e^{-\pi^2 t} - 5\operatorname{sen}(7\pi x)\, e^{-49\pi^2 t}}$

6) Como se vió en la resolución del

ejercicio $\underline{2}$ del trabajo 5,

$u(t,x) = \sum u_n(t,x)$

con $u_n(t,x) = M_n \cos nx \operatorname{sen}(\sqrt{n^2+1}\, t)$

$u_t(t,x) = \sum M_n \cos nx \sqrt{n^2+1} \cos(\sqrt{n^2+1}\, t)$

Como $u_t(x,0) = -2\cos(-3x) + \sqrt{7}\cos 5x$,

para $n = 3$, $M_3\sqrt{10} = -2 \Rightarrow M_3 = \frac{-2}{\sqrt{10}}$

$n = 5$, $M_5\sqrt{26} = \sqrt{7} \rightarrow M_5 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}$,

y los otros M_n son 0. Entonces:

$\boxed{u(t,x) = -\frac{2}{\sqrt{10}}\cos 3x \operatorname{sen}(\sqrt{10}\, t) + \sqrt{\frac{7}{26}}\cos 5x \operatorname{sen}(\sqrt{26}\, t)}$