Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL - 16 DE NOVIEMBRE DE 2019.

Ejercicio 1.

1. La serie de Fourier de f será:

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx).$$

Como f es impar, se tiene que $a_0 = a_k = 0$. Por otro lado:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen}(kx)\, dx = \frac{4}{\pi k^3} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \cdot$$

2. Por el método de separación de variables, llegamos a que un candidato a solución de la ecuación de calor es:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(kx)(A_k \operatorname{sen}(kt) + B_k \cos(kt))$$

Imponiendo que $u(0,x) = 0$, concluimos que $B_k = 0$ para todo k. Imponiendo luego que $u_t(0,x) = f(x)$, llegamos a que $kA_k = b_k$, donde b_k son los coeficientes de Fourier de la parte anterior. Así, $A_k = \frac{b_k}{k}$, y por lo tanto el candidato a solución es:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(kx) \frac{4}{\pi k^4} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt) \cdot$$

3. Por la Proposición 0.4 (páginas 5 y 6 de Notas ecuaciones en derivadas parciales) basta con probar que

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) \frac{4}{\pi k^4} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt)$ converge uniformemente.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{sen}(kx) \frac{4}{\pi k^4} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt)\right]$ converge uniformemente.

Para eso usaremos el criterio de la mayorante de Weierstrass. Para la primera serie tenemos:

$$\left|\operatorname{sen}(kx) \frac{4}{\pi k^4} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt)\right| \leq \frac{8}{\pi k^4} \cdot$$

Como $\sum \frac{8}{\pi k^4}$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) \frac{4}{\pi k^4} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt)$ converge uniformemente.

Para la segunda serie:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{sen}(kx) \frac{4}{\pi k^4} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt)\right]\right| = \left|\cos(kx) \frac{4}{\pi k^3} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt)\right| \leq \frac{8}{\pi k^3} \cdot$$

Como $\sum \frac{8}{\pi k^3}$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{sen}(kx) \frac{4}{\pi k^4} \left((-1)^{k+1} + 1\right) \operatorname{sen}(kt)\right]$ converge uniformemente.

Ejercicio 2.

1. Ver Teórico – Notas de estabilidad.
2. Para esa V, tenemos que su gradiente en $(0,0)$ es $\nabla V(0,0) = (0,0)$ y que su hessiano en $(0,0)$ es:

$$HV(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto, si $a, b > 0$, HV es definida positiva, y entonces V tiene un mínimo local estricto en $(0,0)$.

   Además, tenemos que la función $\dot{V}$ es:

$$\dot{V}(x,y) = 2ay(e^x - 1) + 2by(-2e^x + 2 - y) = 2y(e^x - 1)(a - 2b) - 2by^2.$$

   Tomando $a = 2$ y $b = 1$, se tiene que $\dot{V}(x,y) = -2y^2 \leq 0$. Luego, por el Teorema de Liapunov 1, el origen es estable.

3. Vamos a usar el Teorema de Hartman. Si consideramos $f(x,y) = (2y, -2e^x + 2 - y)$, tenemos que

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2e^x & -1 \end{pmatrix} \text{ entonces } J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Luego el polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda(-1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda + 4$, que tiene todas sus raíces con parte real negativa. Por lo tanto, por el Teorema de Hartman, el origen es asintóticamente estable.