Solución del parcial

1. (a) Sea $f(x) = \lambda x + e^x$. En el intervalo $I = \left[-\frac{1}{\lambda}, 0\right]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano, por lo cual existe al menos una raíz real en I. Además

$$f'(x) = \lambda + e^x > 0,$$

de lo cual deducimos que f es estrictamente creciente. Por tanto, la raíz x_λ de f es única.

(b) Sea $V(x,y) = \frac{\lambda}{2}x^2 + e^x + \frac{1}{2}y^2$, entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda x + e^x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = y.$$

El único punto crítico es $\big(x_\lambda, 0\big)$, clasifiquémoslo. Como la Hessiana en el punto $(x_\lambda, 0)$ vale

$$H(V) = \begin{pmatrix} \lambda + e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces sus valores propios son: 1, $\lambda + e^{x_\lambda}$ ambos positivos. Entonces $H(V)$es definida positiva, en consecuencia $\big(x_\lambda, 0\big)$ es un mínimo de V.

(c) El único punto de equilibrio es $\big(x_\lambda, 0\big)$. Notemos por $F(x,y) = (y, -\lambda x - e^x)$, entonces evaluando la matriz jacobiana de F es el punto de equilibrio obtenemos

$$J(F)\big(x_\lambda, 0\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda - e^{x_\lambda} & 0 \end{pmatrix},$$

por lo cual no podemos usar Hartman. Consideramos entonces la siguiente función de Lyapunov: $E(x,y) = V(x,y) - V(x_\lambda, 0)$. Se tiene entonces que: $E(x_\lambda, 0) = 0$, $E(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq \big(x_\lambda, 0\big)$. Además $\dot{E}(x,y) = \nabla E \cdot F = 0$. De lo que deducimos que $\big(x_\lambda, 0\big)$ es estable. Como $\dot{E} = 0$ tenemos que E es una preintegral, entonces las soluciones de la ecuación están contenidas en las curvas de nivel de E por lo cual $\big(x_\lambda, 0\big)$ no es asintóticamente estable.

2. (a) Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = U(x)T(t)$. Entonces, para que sea solución de la ecuación diferencial se tienen que verificar las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} U''(x) + \lambda U(x) & = & 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) & = & 0 \end{cases}$$

donde λ constante.

i. Si $\lambda = 0$: $U''(x) = 0$, entonces $U(x) = ax + b$.
$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ entonces $U'(0)T(t) = 0 = U'(\pi)T(t)$ para todo t, por lo tanto $U'(0) = a = 0$, y $U(x) = b$. Por otro lado, $T'(t) = 0$ entonces $T(t) = c$, constante. Concluimos que $u(x,t) = bc$ constante.

ii. Supongamos $\lambda < 0$: en este caso tenemos que $U(x) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{-\lambda}x)$. Si derivamos $U'(x) = A\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}x) + B\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}x)$, $U'(0) = B = 0$, $U'(\pi) = 0$ entonces $A = 0$. Lo que implica que $u(x,t)$ es la solución trivial.

iii. Finalmente veamos el caso $\lambda > 0$: en este caso $U(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, derivando $U'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$.
$U'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0$, entonces $B = 0$, $U'(\pi) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, entonces, si $A \neq 0$ tenemos que $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, esto pasa si $\sqrt{\lambda} = k$, $k \in \mathbb{N}$.
Finalmente $U_n(x) = A_n \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.
Para estos valores de λ tenemos que $T'(t) - n^2T(t) = 0$, entonces $T(t) = B_n e^{n^2t}$. Podemos de esta manera considerar $u_n(x,t) = c_n \cos(nx)e^{n^2t}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, sumando todas las soluciones, tomamos un candidato a solución de la forma

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx)e^{n^2t}.$$

Donde $u(x,0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx) = f(x)$. Como f es de clase C^1, par de período 2π podemos hacer su desarrollo en cosenos. Entonces $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$, donde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{e^{-n^2}}{n^2+1}.$$

Entonces, como $a_0 = 1$, entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2(t-1)}}{n^2+1}\cos(nx)$$

(b) i. Para probar la continuidad de u en $[0,\pi]\times[0,1]$ veamos que la serie de Fourier converge uniformemente. El término general de la serie es $\left|\frac{e^{-n^2(1-t)}}{n^2+1}\cos(nx)\right|$, y en $[0,\pi]\times[0,1]$ cumple la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{e^{-n^2(1-t)}}{n^2+1}\cos(nx)\right| \leq \frac{1}{n^2+1}$$

y como $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge, por el criterio de la mayorante de Weierstrass se obtiene que la serie converge uniformemente en el cerrado $[0,\pi]\times[0,1]$. Por último, como las reducidas n-ésimas son continuas entonces u es continua.

ii. Sea $(x_0,t_0) \in (0,\pi)\times(0,1)$, tomemos δ tal que $t_0 < \delta < 1$ y el abierto $A = (0,\pi)\times(0,\delta)$. Sea $(x,t) \in A$. Utilicemos nuevamente el criterio de la mayorante de Weierstrass aplicado a $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}$:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|\frac{n^2 e^{-n^2(1-t)}}{n^2+1}\cos(nx)\right| \leq e^{-n^2(1-\delta)}$$

y esto último es el término general de una serie convergente. Con esto, aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass, la reducida n-ésima $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial t}$ converge uniformemente en A. Por el siguiente Teorema:
Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales, derivables en (a, b) para las que se cumple:

- Existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $\sum_{u=1}^{\infty} f_u(x_0)$ converge.
- Existe g definida en (a, b) tal que $\sum_{j=1} \infty f_j' \rightrightarrows g$, en (a, b) entonces existe f en (a, b) derivable tal que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows f$. Además, $\forall\, x$, $f'(x) = g(x)$ y por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x} \sum f_n = \sum \frac{\partial f_n}{\partial x}$

entonces se puede cambiar la serie con la derivada y por tanto vale $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum \frac{\partial u_n}{\partial t}$.

3. Ver teórico.