Ecuaciones Diferenciales
Soluciones segundo parcial

24 de noviembre de 2015.

Ejercicio 1 Buscando soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, la condición $u_t = u_{xx}$ implica $X(x)T^{'}(t) = X^{''}(x)T(t)$. Por lo tanto

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{T^{'}(t)}{T(t)} = \lambda \ (cte).$$

Entonces hay que resolver la ecuaiones $X^{''} - \lambda X = 0$ y $T^{'}(t) - \lambda T(t) = 0$. La condición $u_x(0,t) = 0$ implica $X^{'}(0) = 0$ y $u_x(\pi,t) = 0$ implica $X^{'}(\pi) = 0$. Por lo tanto hay que resolver

$$X^{''} - \lambda X = 0 \text{ con las condiciones } X^{'}(\pi) = X^{'}(0) = 0.$$

Resolviendo esta última ecuación tenemos que $X(x) = A_n cos(nx)$ y que $\lambda = -n^2$ con $n \in \mathbb{N}$. La ecuación $T^{'}(t) - \lambda T(t) = 0$ tiene como solución $T(t) = B_n e^{-n^2 t}$. Por lo tanto, tenemos que

$$u_n(x,t) = C_n cos(nx) e^{-n^2 t} \text{ donde } C_n = A_n B_n.$$

Si consideramos $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ entonces la condición $u(x,0) = x$ implica que $\sum_{n=0}^{\infty} C_n cos(nx) = x$. Por lo que C_n debe ser el coeficiente de Fourier de la extensión par de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Por lo tanto

$$C_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) & \text{si } n > 0 \\ \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)) cos(nx) e^{-n^2 t}$$

Vamos a probar que u verifica todas las condiciones de $(*)$. Entonces por lo que se probó en el teórico tenemos que $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}$ y que $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}$ para $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty)$. Por otro lado sabemos que $\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}$. Entonces

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

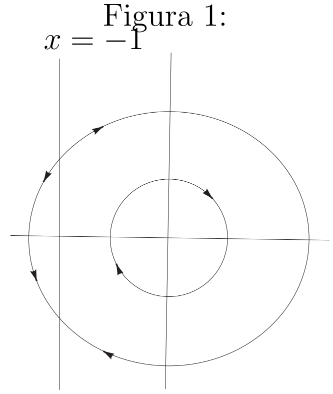
Por lo tanto u verifica $u_t = u_{xx}$. Las demás condiciones son fáciles de probar.

b) ver teórico.

Ejercicio 2 a) ver teórico.

El conjunto de puntos críticos es $\{(x,y) : \; x = -1\} \cup \{(0,0)\}$. Si consideramos $V(x,y) = x^2 + y^2$ entonces $\dot{V}(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(y + yx) + 2y(-x - x^2) = 0$. Lo que implica que V es una preintegral y por lo tanto las soluciones están incluidas en las curvas de nivel de V, que son circunferencias centradas en el origen. Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama de fase (ver figura 1):

Figura 1:



Del diagrama de fase se deduce que el origen es estable, pero no asintóticamente estable y los puntos de la forma $(-1, y)$ con $y \geq 0$ son inestables y los puntos de la forma $(-1, y)$ con $y < 0$ son estables pero no asintóticamente estables.