2° PARCIAL EC. DIF. 2013

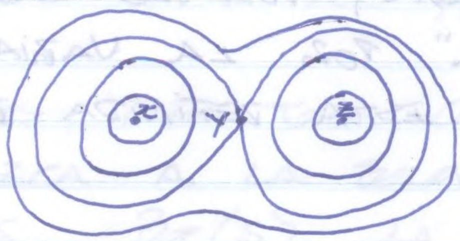
PROBLEMA 1

$\dot{x} = f(x)$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ EN LAS HIPÓTESIS DEL TEO DE PICARD.

SEA $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 / $\dfrac{d}{dt}(H \circ x) = 0$

(x solución a la ec. dif)

LAS CURVAS DE NIVEL DE H SE DIBUJA A CONTINUAC



x, y, z PTOS CRÍTICOS

(A) SABEMOS QUE $\dfrac{d}{dt}(H(x(t))) = 0 \Rightarrow H(x(t)) = K$ $\underline{ct}$

ESTO IMPLICA QUE LAS SOLUCIONES $x(t)$ ESTÁN CONTENIDAS EN LAS CURVAS DE NIVEL DE H, DIBUJADAS ANTERIORMENTE.

COMO SE PUEDE VER, LAS CURVAS DE NIVEL DE H ESTAN ACOTADAS, POR LO TANTO, LAS SOL. ESTAN ACOTADAS <u>ESPACIALMENTE</u>

AHORA, CONSIDERO UNA SOLUCIÓN Y SU CORRESPONDIENTE CURVA DE NIVEL ASOCIADA

LUEGO, TOMO UN COMPACTO INCLUIDO EN $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ QUE CONTENGA DICHA CURVA DE NIVEL

COMO f ESTÁ EN LAS HIP DEL TEO DE PICARD, TAMBIÉN SE ENCUENTRA EN LAS HIPÓTESIS DEL TEOREMA DE ESCAPE DE COMPACTOS.

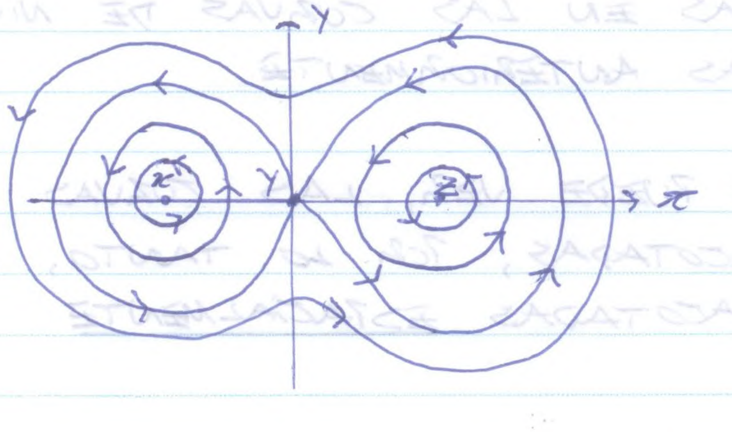
ES DECIR EL PAR $(x(t), t)$ NO PUEDE ESTAR CONTENIDO DENTRO DE DICHO COMPACTO.

VIMOS ANTERIORMENTE QUE LA VARIABLE ESPACIAL ESTÁ ACOTADA, POR LO TANTO LA SOLUCIÓN "SE ESCAPA" POR LA VARIABLE TEMPORAL, ES DECIR ESTA DEFINIDA PARA TODO TIEMPO.

(B) POR LO VISTO EN LA PARTE A, EL DIAGRAMA DE FASE COINCIDE CON LAS CURVAS DE NIVEL DE H.

LO QUE FALTA DETERMINAR ES LA EVOLUCIÓN TEMPORAL (HABLANDO MAL Y PRONTO "LAS FLECHITAS")

LOS MISMO CON LOS EJES.



(C) VER TEÓRICO

(D)

I) x ESTABLE.

PARA PROBAR ESTO, CONSIDERO LA BOLA DE CENTRO x Y RADIO ε, $B_x(\varepsilon)$

PARA ESE ε PUEDO ENCONTRAR UNA ÓRBITA CERRADA TOTALMENTE INCLUIDA EN $B_x(\varepsilon)$

LUEGO, CONSIDERO LA MÍNIMA DISTANCIA DE DICHA ÓRBITA AL PUNTO x Y LA LLAMO δ

ENTONCES, PARA TODA COND. INIC. QUE PERTENEZCA A LA BOLA DE CENTRO x Y RADIO δ, $B_x(\delta)$, LA ÓRBITA ASOCIADA JAMÁS INTERSECTA A LA ÓRBITA INICIAL (POR LA UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES) Y POR ENDE PERMANECEN A MENOS DE ε DE x.

II) z ESTABLE.

IDEM QUE PARA x

III) y INESTABLE.

PUES COMO SE VÉ EN EL DIAGRAMA DE FASE TENEMOS TRAYECTORIAS QUE SE ALEJAN

PROBLEMA 2

$u(x,t)$ DEFINIDA EN $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$
TAL QUE:

⚠ OJO! ERROR EN LETRA

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < L, \; t > 0$$
$$u_x(0,t) = \underline{u_x(L,t)} = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = x^2 \quad 0 \leq x \leq L$$

<u>MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES:</u>

SUPONGO $u(x,t) = X(x)\,T(t)$
DEBO VERIFICAR LA ECUACIÓN, ES DECIR

$$u_t = X(x)\,T'(t) = X''(x)\,T(t) = u_{xx}$$

DESPEJANDO: $\underbrace{\dfrac{X''(x)}{X(x)}}_{f(x)} = \underbrace{\dfrac{T'(t)}{T(t)}}_{g(t)} = \lambda$

LLEGAMOS A LA IGUALDAD DE DOS FUNCIONES DE VARIABLES DISTINTAS (E INDEPENDIENTES) $f(x)$ Y $g(t)$, LA CUAL SE DÁ UNICAMENTA PARA LA CONSTANTE $\underline{\lambda}$

PROCEDEMOS A RESOLVER AMBAS ECUACIONES:

1) $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \rightarrow T'(t) = \lambda T(t)$

$$\rightarrow \boxed{T(t) = A e^{\lambda t}}$$

2) $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \rightarrow X''(x) = \lambda X(x)$

HALLANDO EL POLINOMIO CARACTERISTICO $\mu^2 = \lambda$, SE DESPRENDEN 3 CASOS:

I) $\underline{\lambda > 0}$: $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$

$\rightarrow X(x) = B e^{\sqrt{\lambda} x} + C e^{-\sqrt{\lambda} x}$

II) $\underline{\lambda = 0}$:

$\rightarrow X(x) = Bx + C$

III) $\underline{\lambda < 0}$: $\mu = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$\rightarrow X(x) = B\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + C\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x)$

PARA PODER DISCERNIR CUAL DE ELLAS ES LA CORRECTA, IMPONEMOS LAS CONDICIONES DE BORDE Y LAS CONDICIONES INICIALES:

$\boxed{\text{C.B.}}$ $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

$u_x(x,t) = X'(x)T(t)$

$\rightarrow X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0 \quad \forall\, t > 0$

$\rightarrow X'(0) = \underline{X'(L) = 0}$

$\boxed{\text{C.I.}}$ $u(x,0) = x^2$

I) $X'(x) = \sqrt{\lambda} B e^{\sqrt{\lambda} x} - \sqrt{\lambda} C e^{-\sqrt{\lambda} x}$

$$\begin{cases} X'(0) = \sqrt{\lambda} B - \sqrt{\lambda} C = 0 \\ X'(L) = \sqrt{\lambda} B e^{\sqrt{\lambda} L} - \sqrt{\lambda} C e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(B - C) = 0 \\ \sqrt{\lambda}(B e^{\sqrt{\lambda} L} - C e^{-\sqrt{\lambda} L}) = 0 \end{cases}$$

COMO $\lambda \neq 0$ (PUES SINO ESTARÍAMOS EN CASO II)

$\boxed{B = C}$

$B e^{\sqrt{\lambda} L} - C e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0 \rightarrow B e^{\sqrt{\lambda} L} - B e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0$

$B(e^{\sqrt{\lambda} L} - e^{-\sqrt{\lambda} L}) = 0$

$B \neq 0$ SINO $X(x) \equiv 0$ Y

POR ENDE $u(x,t) \equiv 0$

$\rightsquigarrow e^{\sqrt{\lambda} L} - e^{-\sqrt{\lambda} L} = 0 \rightsquigarrow \dfrac{e^{2\sqrt{\lambda} L} - 1}{\underbrace{e^{\sqrt{\lambda} L}}_{>0}} = 0$

$\rightsquigarrow e^{2\sqrt{\lambda} L} - 1 = 0 \rightarrow e^{2\sqrt{\lambda} L} = 1 \rightsquigarrow 2\sqrt{\lambda} L = 0$

- $\lambda = 0$ ↯
- $L = 0$ ↯

ENTONCES EL PRIMER CASO QUEDA DESCARTADO

II) $X'(x) = B$

$$\begin{cases} X'(0) = B = 0 \\ X'(L) = B = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{B = 0}$$

POR LO TANTO $\underline{X(x) = C}$

PERO ESTA NO SATISFACE LA CONDICIÓN INICIAL $u(x,0) = x^2$ Y

ENTONCES ESTE CASO TAMBIÉN QUEDA DESCARTADO

III) $X'(x) = -\sqrt{\lambda}\, B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x) + \sqrt{-\lambda}\, C \cos(\sqrt{-\lambda}\, x)$

• $X'(0) = \sqrt{-\lambda}\, C = 0$

COMO $\lambda \neq 0 \rightarrow \boxed{C = 0}$

• $X'(L) = \sqrt{-\lambda}\, B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, L)$

COMO $\lambda \neq 0$ $\rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, L) = 0$

$B \neq 0$ $\rightarrow \sqrt{-\lambda}\, L = k\pi$

$\rightarrow -\lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k \in \mathbb{Z}$

POR LO TANTO: $X(x) = B \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

$T(t) = A e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = A \cdot B \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

COMO LA CONDICIÓN INICIAL ES $u(x,t) = x^2$
BUSCAMOS UNA SERIE COMO SOLUCIÓN
PARA ELLO RENOMBRAMOS EL PRODUCTO AB
COMO b_K

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{K=0}^{+\infty} b_K \cos\left(\frac{K\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{K\pi}{L}\right)^2}$$

IMPONIENDO LAS C.I.:

$$u(x,0) = \sum_{K=0}^{+\infty} b_K \cos\left(\frac{K\pi}{L} x\right) = x^2$$

ES DECIR, b_K SON LOS COEFICIENTES DE FOURIER
DEL DESARROLLO TIPO COSENO DE x^2

$$b_K = 2 \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{K\pi}{2} x\right) dx \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{2L}{K\pi}\right)^2 (-1)^K$$

SUGERENCIA.

QUE PASA CON $K=0$?

$$b_0 = \frac{2}{2} \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{2}{3} L^2$$

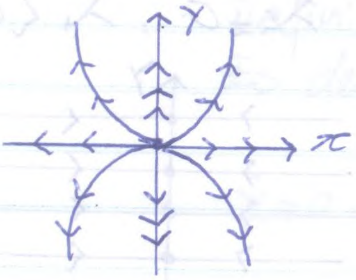
$$\rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{3} L^2 + \sum_{K=1}^{+\infty} \left(\frac{2L^2}{K\pi}\right)^2 (-1)^K \cos\left(\frac{K\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{K\pi}{L}\right)^2 t}}$$

PROBLEMA 3

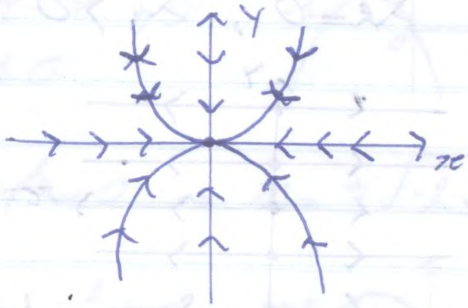
(A)

$\dot{x} = Ax \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

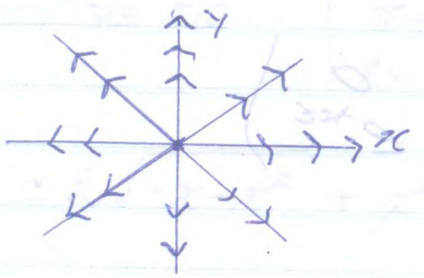
I) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$



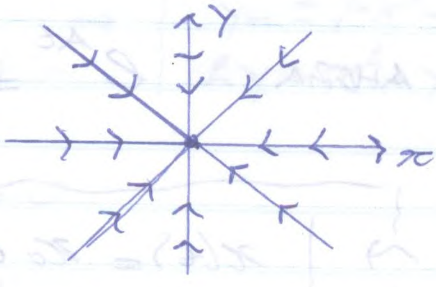
II) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



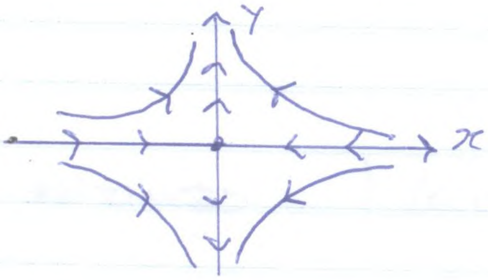
III) $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$



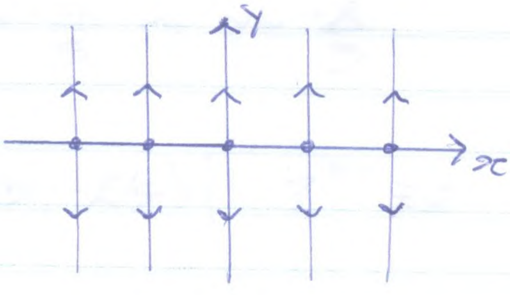
IV) $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$



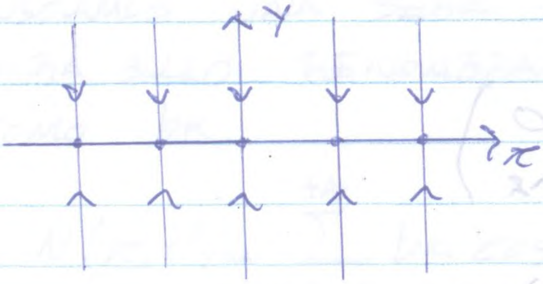
V) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$



VI) $\lambda_1 = 0 \; , \; \lambda_2 > 0$



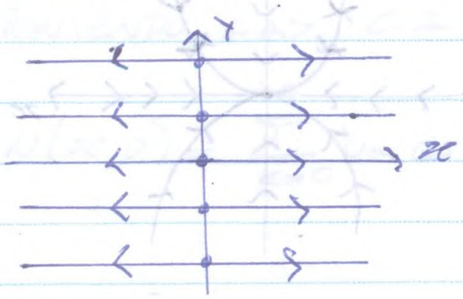
VII) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$



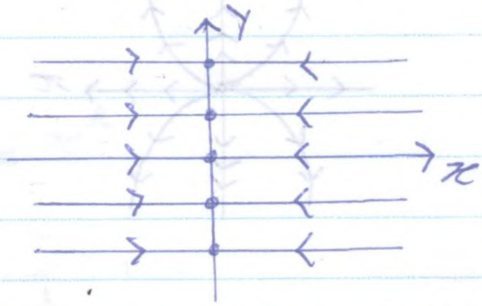
VIII) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$

TODO $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ES
PONTO DE EQUILIBRIO

IX) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 > 0$



X) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 < 0$



(B) $x(t) = e^{At} \cdot x_0$

AHORA: $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

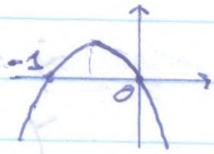
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= y_0 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}}$$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + y^2 \\ \dot{y} = 2y + x^2 + y^2 \end{cases}$

▶ DIAGRAMA DE FASE

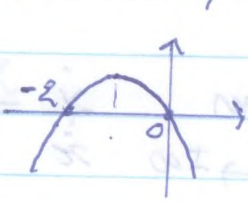
• VEAMOS $\underline{\dot{x}=0}$: $x + x^2 + y^2 = 0 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{-x-x^2}$

Definida para $-x-x^2 \geq 0$
Es decir $-1 \leq x \leq 0$



$\underline{\dot{y}=0}$: $2y + x^2 + y^2 = 0 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{-2y-y^2}$

Definida para $-y-y^2 \geq 0$
Es decir $-2 \leq y \leq 0$



• PUNTOS DE EQ $\begin{cases} x + x^2 + y^2 = 0 \\ 2y + x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = \pm\sqrt{-x^2-x} \\ 2y + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$\to \pm 2\sqrt{-x-x^2} + \cancel{x^2} - x - \cancel{x^2} = 0$

$y = -\sqrt{-x-x^2}$
$x \leq 0$

$\to 4(-x-x^2) = x^2 \rightsquigarrow 5x^2 + 4x = 0$

$\hookrightarrow x = 0 \to y = 0$

$\hookrightarrow x = -\frac{4}{5} \rightsquigarrow y = -\frac{2}{5}$

ENTONCES $\{(0,0), (-4/5, -2/5)\}$ P^{tos} EQ.

• SIGNO: EVALUANDO EN UN PUNTO DENTRO Y FUERA DE LAS CFA'S QUE DETERMINAN LOS PUNTOS CRÍTICOS

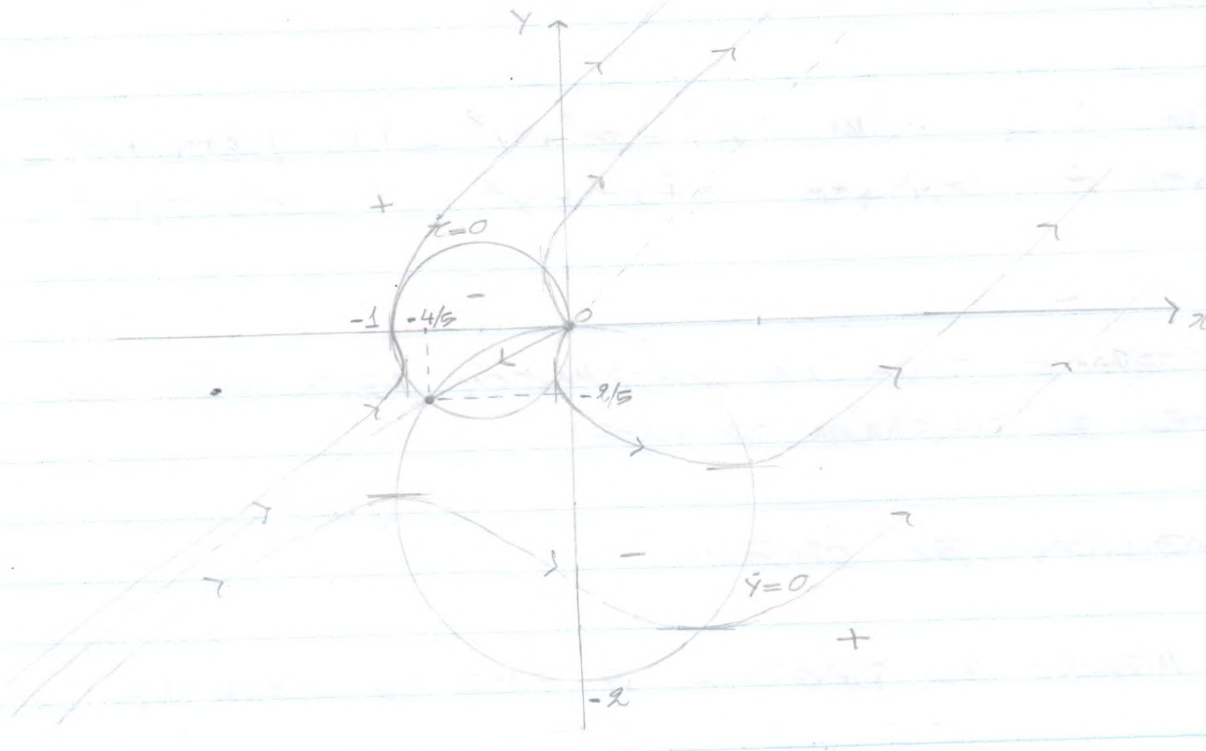
$\dot{x} < 0$ DENTRO DE LA CFA $x + x^2 + y^2 = 0$
$\dot{x} > 0$ FUERA DE LA CFA.

$\dot{y} < 0$ DENTRO DE LA CFA $2y + x^2 + y^2 = 0$
$\dot{y} > 0$ FUERA DE LA CFA.

• LÍMITE

$$\lim_{(x,y)\to\pm\infty} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \lim_{(x,y)\to\pm\infty} \frac{2y + x^2 + y^2}{x + x^2 + y^2} = \lim \frac{y(2+y) + x^2}{x(1+x) + y^2} = 1$$

CON TODA LA INFORMACIÓN RECAUDADA SE REALIZÓ EL DIAGRAMA DE FASE.



▶ ESTABILIDAD DEL ORIGEN.

1) MIRANDO EL DIAGRAMA DE FASE, SE DEDUCE QUE EL ORIGEN ES INESTABLE.

2) LINEALIZANDO.

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2x & 2y \\ 2x & 2+2y \end{pmatrix}$$

SI EVALUAMOS EN EL ORIGEN

$$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{VAPS: } 1 \text{ Y } 2.$$

COMO EL ORIGEN ES UN PUNTO DE EQ. AISLADO Y EL JACOBIANO DE f EVALUADO EN DICHO PUNTO NO POSEE VAPS CON PARTE REAL NULA, POR HARTMAN, EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA LINEAL

$$\dot{Y} = Jf(0,0)\,Y$$

ES ANÁLOGO AL DEL SISTEMA NO LINEAL EN UN ENTORNO DEL ORIGEN

COMO VIMOS LOS VALORES PROPIOS SON 1 Y 2 POSITIVOS, POR LO TANTO EL ORIGEN DEL SISTEMA LINEAL ES INESTABLE Y POR LO ANTEDICHO, EL ORIGEN DEL SISTEMA NO LINEAL ES INESTABLE