Ecuaciones Diferenciales
Soluciones segundo parcial

28 de noviembre de 2011.

1.
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - e^{-\pi})$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}(e^\pi - e^{-\pi})$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{(-1)^n n}{\pi(1+n^2)}(e^{-\pi} - e^{\pi})$$

Entonces,
$$\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - e^{-\pi}) + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}(-1)^{2n}$$

Luego,
$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{(1+n^2)} + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\tanh\pi},$$

resultando que
$$\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi} - 1\right).$$

2. a) Ver teórico.

b) $f_n(0) = 0$ y si $x \neq 0$, usando a la suma de la serie geomtrica,
$$f_n(x) = x^2\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^i = 1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f tal que $f(0) = 0$ y $f(x) = 1$ si $x \neq 0$. Notar que f no es continua, por lo tanto, usando la parte anterior, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a f.

3. a) Si buscamos solución de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, resulta,
$$Y(y)\left(x^2X''(x) + xX'(x)\right) + X(x)Y''(y) = 0,$$

de donde se deduce que
$$\frac{x^2X''(x) + xX'(x)}{X(x)} = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

El problema se reduce a resolver dos ecuaciones diferenciales:
$$x^2X''(x) + xX'(x) - \lambda X(x) = 0,$$
$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$$

Como $X(x)Y(0) = X(x)Y(\pi) = 0$, $Y(0) = Y(\pi) = 0$ y el polinomio característico de la segunda ecuacin es, $\mu^2 + \lambda = 0$, por lo tanto, $\lambda > 0$ entonces $Y(y) = B\cos(\sqrt{\lambda}y) + C\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}y)$.
La primera sabemos que tiene solución de la forma $X(x) = Ax^a$, donde $a = \sqrt{\lambda}$ (está dada en la letra del ejercicio). Como $u(x,0) = 0$, $B = 0$. Como $u(x,\pi) = 0$, $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi = 0$ entonces $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$. Si Llamamos $k = \sqrt{\lambda}$,

$$u_k(x,y) = Dx^k \operatorname{sen}(ky).$$

Vanos a proponer solución de la forma

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

Para esto hallamos la serie de fourier de la función $f_k(x) = D_k \operatorname{sen}(kx)$. Al ser una función par, $a_0 = a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} D_k \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(nx)\,dx,$$

calculando esta integral llegamos a que, $b_k = D_k$, y $b_n = 0$, $\forall n \neq k$, entonces, $f_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_k \operatorname{sen}(kx)$. De la condición para $u(1,y)$, se deduce que $D_k = \frac{1}{k^4}$.
Finalmente,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} x^n \operatorname{sen}(ny)$$

es la solución buscada. Esto tiene sentido ya que $|\frac{1}{n^4}x^n \operatorname{sen}(ny)| < \frac{1}{n^4}$, por lo tanto por Weierstrass la serie es convergente.

b) Ver terico.