Segundo parcial de Ecuaciones Diferenciales.

29 de noviembre de 2010.

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impar y periódica de período 2π definida como

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ -x+\pi \text{ si } x\in(\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$$

   a) Hallar la serie de Fourier asociada a f.

   Por ser f impar, se tiene que su serie de Fourier será solo con senos. Para hallar los coeficientes correspondientes a f debemos calcular:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)sen(kx)dx=\frac{2}{\pi}(\int_{0}^{\pi/2} f(x)sen(kx)dx+\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)sen(kx)dx)$$

$$=\frac{2}{\pi}(-\frac{xcos(kx)}{k}+\frac{1}{k^2}sen(kx))\,|_0^{\pi/2}+\frac{2}{\pi}(\frac{(x-\pi)}{k}cos(kx)-\frac{sen(kx)}{k^2})\,|_{\pi/2}^{\pi}=\begin{cases} 0 & \text{si } k=2n \\ \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} & \text{si } k=2n+1 \end{cases}$$

   Por lo tanto la serie de Fourier de f es $\frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h sen((2h+1)x)}{(2h+1)^2}$.

   b) Calcular, justificando, la suma de la serie $\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

   La función f es derivable a trozos y continua, por lo tanto el teorema de Dini nos indica que su serie de Fourier evaluada en $\pi/2$ nos dará como resultado $f(\pi/2)$. O sea que:
   $\pi/2=f(\pi/2)=\frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h sen((2h+1)\pi/2)}{(2h+1)^2}=\frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{(2h+1)^2}$.
   De esto se concluye que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

   c) Se considera el problema

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}-u & (x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(x,0)=f(x) & x\in[0,\pi] \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t\geq 0 \end{cases}$$

   Resolver utilizando el método de separación de variables.

   Buscamos en un principio funciones $v(x,t)=X(x)T(t)$ no nulas que resuelvan el problema:
   $\begin{cases} v_t=v_{xx}-v & (x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty) \\ v(0,t)=v(\pi,t)=0 & t\geq 0 \end{cases}$
   Esto es equivalente a $\begin{cases} T'(t)X(x)=T(t)(X''(x)-X(x)) & (x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty) \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$

   Por lo tanto precisamos funciones X,T tales que $\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)-X(x)}{X(x)}$. Como el término de la derecha depende únicamente de t y el de la izquierda de x, ambos deben ser constantes.

   Resolvamos $X''-X=cX$ ($c\in\mathbb{R}$), $X(0)=X(\pi)=0$.
   Si $1+c>0$, $X''-X=cX$ tiene solución $X(x)=Ae^{(\sqrt{1+c})x}+Be^{-(\sqrt{1+c})x}$; si exigimos $X(0)=X(\pi)=0$ obtenemos como única solución $X=0$.
   Si $1+c=0$, $X''-X=cX$ tiene soluciones de la forma $X(x)=Ax+B$; si pedimos $X(0)=X(\pi)=0$ nos queda como única solución $X=0$.
   Si $1+c<0$, $X''-X=cX$ tiene soluciones de la forma $X(x)=Asen((\sqrt{-c-1})x)+Bcos((\sqrt{-c-1})x)$; si queremos $X(0)=X(\pi)=0$, tenemos $B=0$ y $\sqrt{-c-1}\in\mathbb{N}$, o sea $c=-k^2-1$ ($k\in\mathbb{N}$) y $X_k(x)=A_k sen(kx)$.
   Para T nos quedó la ecuación $T'=(-k^2-1)T$, que tiene solución $T_k(t)=B_k e^{-(k^2+1)t}$.

Concluimos que $v_k(x,t) = C_k sen(kx)e^{-(k^2+1)t}$ es solución a $\begin{cases} v_t = v_{xx} - v & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$

La idea ahora es sumar algunas de estas v_k para obtener una función $u(x,t)$ que cumpla $u(x,0) = f(x)\ \forall x \in [0,\pi]$.
Si $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,t)$, entonces $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k sen(kx)$. Si precisamos $u(x,0) = f(x)\ \forall x \in [0,\pi]$, precisamos que los C_k sean los coeficientes de Fourier de la extensión impar y 2π-periódica de f, que ya los hallamos en a). Por lo tanto, la solución es $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \dfrac{sen(hx)e^{-((2h+1)^2+1)t}}{(2h+1)^2}$.

2. *a*) Enunciar y demostrar el teorema de Lyapunov referente a la estabilidad.
   b) Se considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

i) Determinar la linealización del sistema anterior en un entorno de $(0,0,0)$.

Si definimos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $f(x,y,z) = (y(z-1), -x(z-1), -z^3)$, entonces la matriz jacobiana de f es: $\begin{pmatrix} 0 & z-1 & y \\ -z+1 & 0 & -x \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto el sistema linealizado alrededor de $(0,0,0)$ es $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ii) Resolver el sistema lineal, y discutir la estabilidad en el origen. ¿Qué conclusiones puede hacer a partir de esto sobre la estabilidad de en el origen del sistema no lineal?

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces la matriz $e^{tA} = \begin{pmatrix} cos(t) & -sen(t) & 0 \\ sen(t) & cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la solución general al sistema linealizado es $\begin{pmatrix} x_0 cos(t) - y_0 sen(t) \\ x_0 sen(t) + y_0 cos(t) \\ z_0 \end{pmatrix}$, donde (x_0, y_0, z_0) es el valor que toma la solución en $t = 0$.
Es claro entonces que todas las soluciones tienen norma constante, es decir que si ϕ es solución con $\|\phi(0)\| = r$ entonces $\|\phi(t)\| = r\ \forall t \in \mathbb{R}$, por lo que el origen queda un punto de equilibrio estable aunque no asintóticamente estable.
Esto no nos dice nada acerca de la estabilidad del origen en la ecuación original, ya que los valores propios de la matriz jacobiana tienen parte real 0, por lo que no podemos utilizar el teorema de Hartman.

   c) Estudiar estabilidad en el origen del sistema no lineal de la parte anterior. Sug: Buscar una función de Lyapunov de la forma $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

Si queremos que $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ sea función de Lyapunov para la ecuación precisamos que en un entorno del origen $0 \geq \dot{V}(x,y,z) =< \nabla V, f >= (2a-2b)(z-1)xy - 2cz^4$. Tomando $a = b$ esto se verifica en todo $\mathbb{R}^3$.
Por lo tanto $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ es función de Lyapunov para esta ecuación diferencial y por lo tanto el origen es un punto de equilibrio estable.