Ecuaciones Diferenciales

Primer Parcial, 23 de setiembre de 2017

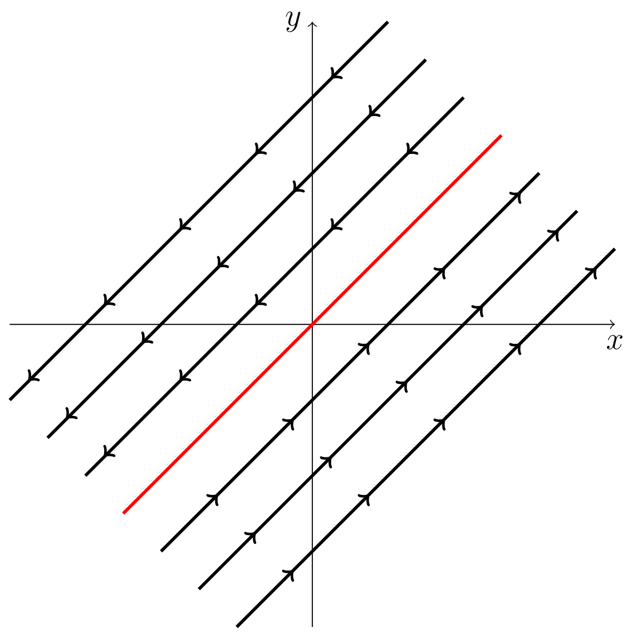
Solución

Ejercicio 1.

(a) La ecuación es:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

Los puntos críticos se obtienen tomando $\dot{x} = \dot{y} = 0$ y corresponden a los puntos con $x = y$. Dado que $\dot{x} = \dot{y}$, entonces $x = y + K$, y las órbitas serán rectas paralelas a la recta $x = y$. En el semiplano $y > x$ tenemos $\dot{x} = \dot{y} < 0$ y en el semiplano $y < x$ resulta $\dot{x} = \dot{y} > 0$. El diagrama de fase queda entonces como muestra la siguiente figura:



Las derivadas son mayores, en valor absoluto, a medida que nos alejamos de la recta $y = x$.

(b) La matriz B tiene valores propios complejos $-2 \pm i$, por lo que:

$$B = P \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Por lo tanto, la matriz exponencial de B resulta:

$$e^{Bt} = Pe^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} P^{-1}$$

Como $(1 - i, 1)$ es vector propio con valor propio $-2 + i$, entonces la matriz P queda:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su inversa es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando, obtenemos:

$$e^{Bt} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & 2 \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

La solución general a la ecuación es $X(t) = e^{Bt} X_0$. Si X_0 tiene coordenadas x_0 e y_0, la solución queda:

$$X(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} x_0(\cos t - \operatorname{sen} t) + 2y_0 \operatorname{sen} t \\ -x_0 \operatorname{sen} t + y_0(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

(1) Como las f_n son continuas y convergen uniformemente a f, sabemos que f debe ser continua, y como $[0,1]$ es compacto, por el teorema de Weierstrass concluimos que f es acotada.

(2) Si fijamos un $x \in [0,1)$ tenemos que $f_n(x) \to 0$ con n. En cambio, si $x = 1$ resulta $f_n(1) = 1$ para todo n. Así, f_n converge puntualmente en $[0,1]$ a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Veamos que no converge uniformemente:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1)} (x^n) = 1 \text{ para todo } n$$

por lo que no hay convergencia uniforme.

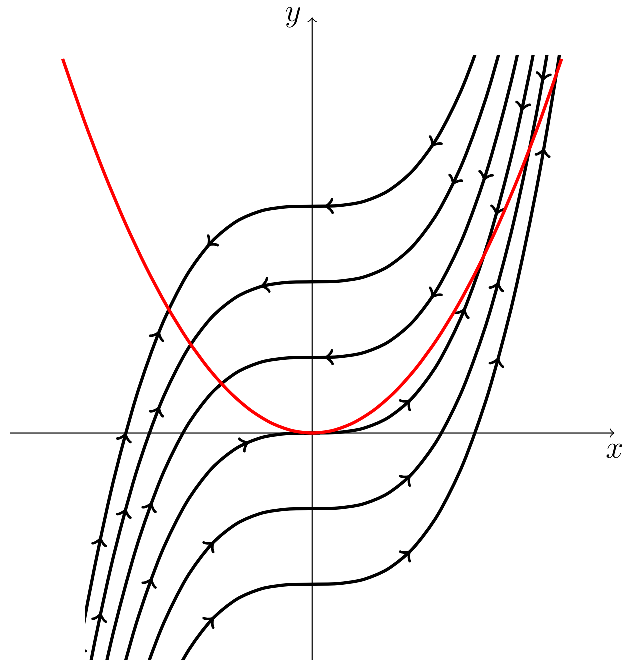
Esto último también podía probarse simplemente diciendo que como las f_n son continuas y la f no lo es, no puede haber convergencia uniforme, ya que si lo hubiese, f debería ser continua.

Ejercicio 3.

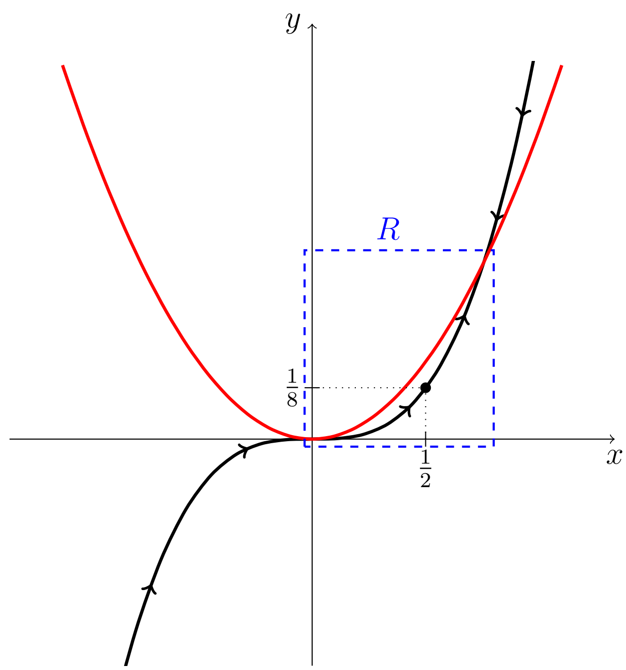
Ver teórico.

Ejercicio 4.

(1) Sabemos que los puntos críticos están en los puntos donde g se anula. En este caso, eso es en la parábola $y = x^2$. Además, como $H(x,y) = x^3 - y$ es una preintegral, sabemos que las soluciones se moverán por las curvas de nivel de la función H. Estas curvas son de la forma $y = x^3 + K$, con $K \in \mathbb{R}$. Así, un posible diagrama de fase es el que se muestra en la siguiente figura:



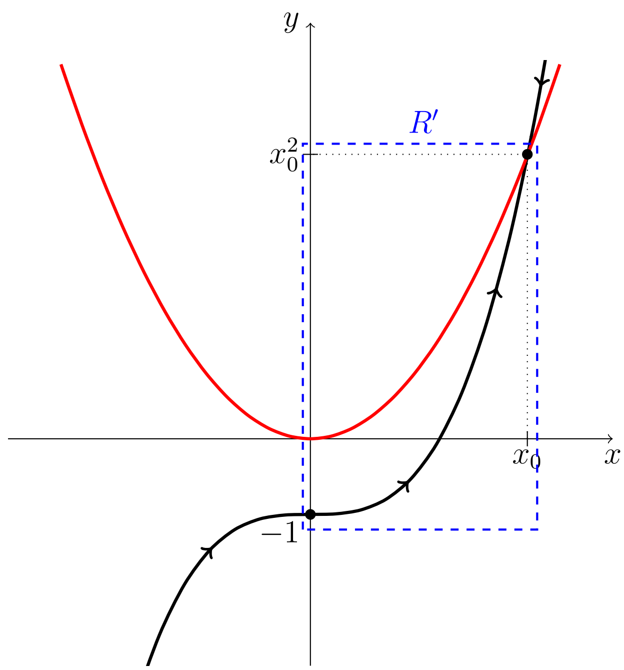
(2) Como f está en las condiciones de Picard entonces la solución maximal que pasa por $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ existe y es única. Llamémosla $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, donde $x, y : I_{\max} \to \mathbb{R}$. Como $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) = 0$, entonces la trayectoria de φ está contenida en la curva $y = x^3$. Notar que dicha curva corta a $y = x^2$ en $(0,0)$ y $(1,1)$. Como esos puntos corresponden a trayectorias estacionarias y la ecuación es autónoma, entonces la trayectoria de φ necesariamente está contenida en el tramo de $y = x^3$ entre $(0,0)$ y $(1,1)$. Luego la trayectoria de φ es acotada y está contenida en el rectángulo R de la figura.



Dado que φ es solución maximal, verifica el teorema de escape de compactos. Para $N \in \mathbb{N}, N > |t_0|$, considero el compacto $K = [-N, N] \times R$. Entonces el teorema nos dice que existen $t_1, t_2 \in I_{\max}$ con $t_1 < t_0 < t_2$ tales que $(t_1, x(t_1), y(t_1)) \notin K$ y $(t_2, x(t_2), y(t_2)) \notin K$. Como $(x(t), y(t)) \in R$ para todo $t \in I_{max}$, entonces el gráfico de la solución se escapa por el tiempo, y por lo tanto $t_1 < -N$ y $t_2 > N$. Como este razonamiento vale para todo $N > |t_0|$, concluimos que la solución maximal está definida en todo $\mathbb{R}$.

(3) Como f está en las condiciones de Picard entonces la solución maximal que pasa por $(-1, 0)$ existe y es única. Llamémosla $\psi(t) = (x(t), y(t))$, donde $x, y : J_{\max} \to \mathbb{R}$. Como $H(-1, 0) = -1$, entonces la trayectoria de ψ está contenida en la curva $y = x^3 - 1$.

Sabemos que para $x \leq 0$ se cumple que $x^3 - 1 < x^2$. Además, existe $M > 0$ tal que para todo $x > M$ es cierto que $x^3 - 1 > x^2$. Entonces existe $x_0 > 0$ tal que $y = x^3 - 1$ corta a $y = x^2$ en el punto $(x_0, {x_0}^2)$. Así, la trayectoria de ψ está contenida en el tramo del gráfico de $y = x^3 - 1$ desde $x = -\infty$ a x_0. Como $x' > 0$ cuando $y < 0$, entonces la trayectoria va de izquierda a derecha, como en la siguiente figura:



Consideremos entonces el rectángulo R' de $\mathbb{R}^2$ como en el dibujo. Dado $N \in \mathbb{N}$, $N > |t_0|$, llamo $K' = [-N, N] \times R'$. Por el teorema de escape de compactos existe un $t_2 \in J_{max}$, $t_2 > t_0$, tal que $(t_2, x(t_2), y(t_2)) \notin K'$. Como $(x(t), y(t)) \in R'$ para $t \geq t_0$, esto implica que $t_2 > N$ y como este razonamiento vale para cualquier natural mayor que $|t_0|$, concluimos que el intervalo maximal no está acotado superiormente.