Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

Solución Primer parcial - 21 de setiembre de 2019.

Ejercicio 1.

Parte 1.

Sea $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$ y $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación $x^{'} = -x$, obtenemos:

$$sX(s) - x(0) = -X(s).$$

Usando que $x(0) = x_0$ y despejando, tenemos que $X(s) = \dfrac{x_0}{s+1}$. Antitransformando, llegamos a que $x(t) = x_0 e^{-t}$.
Nuevamente, aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación $y^{'} = -x$, obtenemos:

$$sY(s) - y(0) = -X(s).$$

Como $X(s) = \dfrac{x_0}{s+1}$, despejando obtenemos que:

$$Y(s) = \frac{y_0}{s} - \frac{x_0}{s(s+1)}.$$

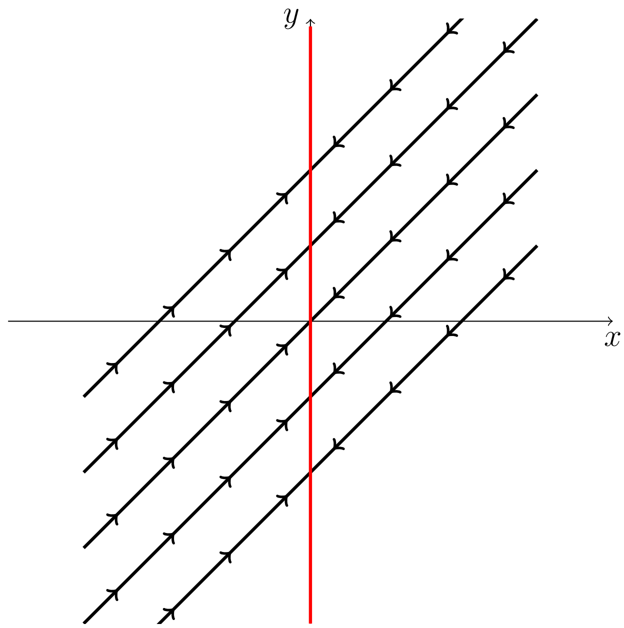
Como $\dfrac{x_0}{s(s+1)} = \dfrac{x_0}{s} + \dfrac{-x_0}{s+1}$, se tiene que $Y(s) = \dfrac{y_0}{s} + \dfrac{-x_0}{s} + \dfrac{x_0}{s+1}$. Antitransformando, obtenemos $y(t) = y_0 - x_0 + x_0 e^{-t}$.

Parte 2.

Tenemos que cualquier función constante de la forma $(x(t), y(t)) = (0, y_0)$ es solución, por lo que todos los puntos del eje y son soluciones constantes.
Además, como sabemos que todas las soluciones pueden escribirse como:

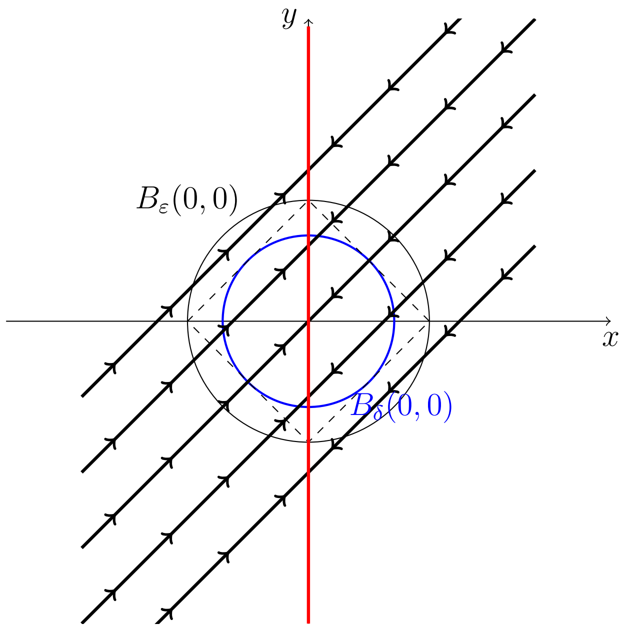
$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 - x_0 + x_0 e^{-t})$$

despejando t de una ecuación y sustituyendo en la otra, obtenemos que $y(t) = y_0 - x_0 + x(t)$, por lo que las órbitas en el diagrama de fase estarán contenidas en rectas paralelas a $y = x$.
Esto también puede verse a partir de la ecuación, ya que $y' = x'$. Si integramos esa igualdad entre 0 y t, obtenemos $y(t) - y_0 = x(t) - x_0$.
Además como $(x_0 e^{-t}, y_0 - x_0 + x_0 e^{-t}) \to (0, y_0 - x_0)$ cuando $t \to +\infty$, se tiene que el diagrama de fase es:



Parte 3.

El origen es estable, no asintóticamente estable. Para ver la estabilidad, queremos que para cualquier entorno de centro $(0,0)$ y radio $\varepsilon > 0$ exista un entorno de centro $(0,0)$ y radio $\delta > 0$ donde todas las soluciones con condición inicial a menos de δ se mantengan dentro de la bola de radio ε para todo $t > 0$.
Para elegir un posible δ, basta ver que todas las soluciones que tengan condición inicial dentro del cuadrado de centro $(0,0)$ y radio ε girado 45º se mantendrán dentro del mismo para todo $t > 0$ (y por lo tanto dentro de la bola de centro $(0,0)$ y radio ε). Así, podemos tomar como bola de radio δ a aquella cuyo borde es la circunferencia circunscripta a ese cuadrado (que equivale a tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$), como en el dibujo:



Para ver la no estabilidad asintótica, basta notar que en cualquier bola de centro $(0,0)$ y radio $\varepsilon > 0$ existen soluciones constantes de la forma $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$, por lo que en cualquier $B_\varepsilon(0,0)$ existen soluciones que no tienden al origen.

Ejercicio 2.

Parte 1.

Sea $x(t) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, para que $x(t)$ sea solución debe cumplirse que $\operatorname{sen}^2(c) = 0$, de donde se deduce que $c = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Parte 2.

Sea φ una solución maximal con $\varphi(t_0) = x_0$. Si $x_0 = k\pi$, entonces (por la parte 1) la solución es $\varphi(t) = k\pi$ y el intervalo maximal es $\mathbb{R}$. Si $x_0 \neq k\pi$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_0\pi < x_0 < (k_0+1)\pi$. Supongamos que el intervalo maximal es (a, b). Vamos a probar que $b = +\infty$; de forma análoga se prueba que $a = -\infty$.
Sea K el compacto de la figura 1. Por el teorema de salida de compactos, el gráfico de φ se tiene que salir de K. No se puede salir por la tapa de arriba, ya que cortaría la solución $x(t) = (k_0+1)\pi$. Lo mismo sucede con la tapa de abajo. Entonces se tiene que escapar por la tapa de la derecha, y eso hace que la solución tenga que estar definida para un tiempo $t_1 > b$, lo que implica una contradicción.

Parte 3.

$x'(t) = 0$ si y solo si $t \operatorname{sen}^2(x(t)) = 0$. Por lo tanto, fuera de las soluciones constantes, $x'(t) = 0$ en $t = 0$. Como el signo de x' es igual al signo de $t \operatorname{sen}^2(x)$, x' es positiva para $t > 0$ y negativa para $t < 0$. Por lo tanto en $t = 0$, la solución (no constante) tiene un mínimo estricto.

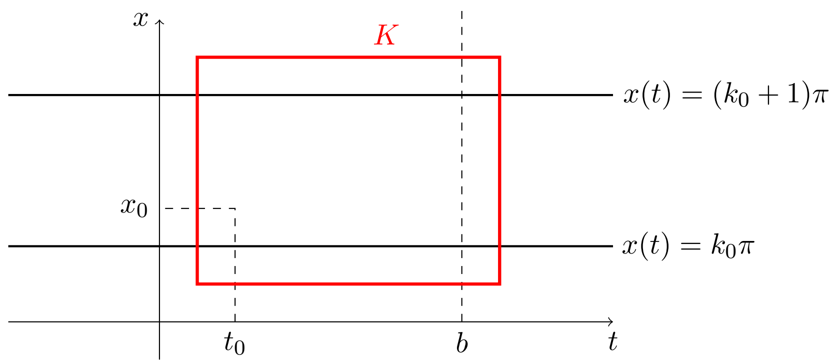
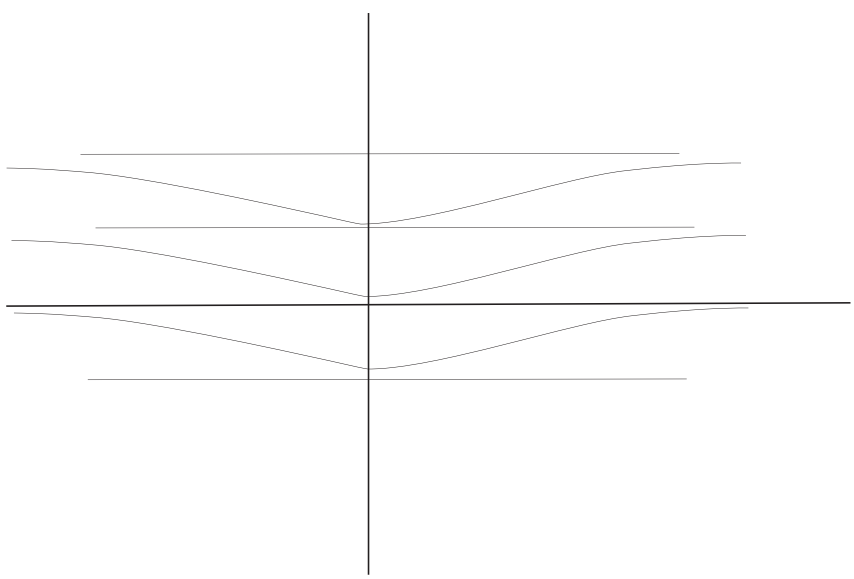


Figura 1: Compacto K usado para salida de compactos.

Parte 4.

Ver figura 2.

Figura 2:



(a)

Ejercicio 3.

Ver Notas curso 2019. Capítulo 5: "Enunciado del Teorema de Picard".