Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales, curso 2018.

Soluciones.

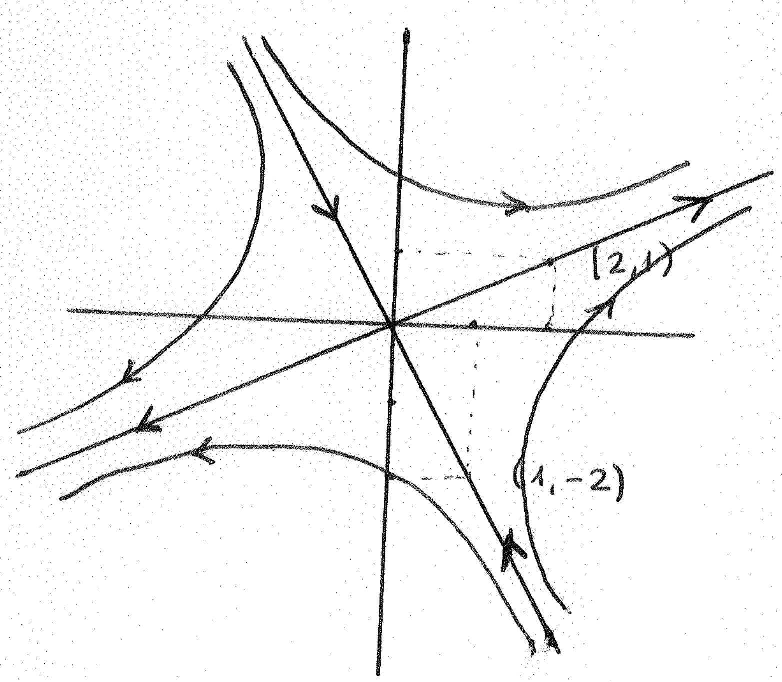
Ejercicio 1

1) Buscamos los valores y vectores propios de A.

Los valores propios son 1 y -1.

Un vector propio de valor propio 1 es (2,1)

Un vector propio de valor propio -1 es (1,-2)



2) Agregando la variable $y = x'$, el sistema equivalente queda

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = -1. \end{matrix}$$

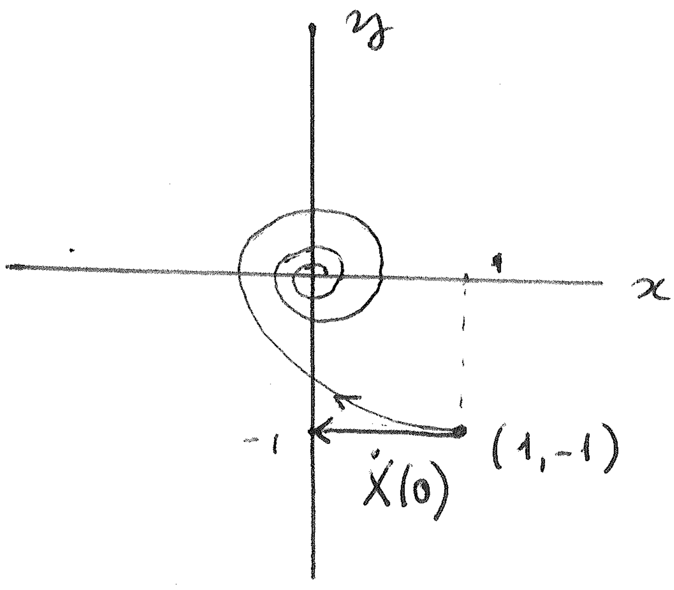
Aquí $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Los valores propios de A (que son las raíces características de la ecuación lineal homogénea de orden 2) son las raíces de

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

que son $-1+i$ y $-1-i$.

Como $\operatorname{Re}(-1+i) < 0$, la solución de $\dot{X} = AX$ con condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ cumple que $X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (0,0)$. Tiende a $(0,0)$ describiendo una espiral. Para saber en qué sentido gira esta espiral, observemos que $\dot{X}(0) = AX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



En el plano xy, el comportamiento de la solución es el descrito en la figura.

Alternativamente, podemos describir la solución mirando la ecuación de orden 2 $x''+2x'+2x=0$. Como sus raíces características son $-1+i$ y $-1-i$, la solución general de esta ecuación es

$$x(t) = e^{-t}\left(c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)\right).$$

La condición inicial $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=-1$ determinará ciertas constantes c_1 y c_2 (que son $c_1=1$ y $c_2=0$). La solución $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ exponencialmente, oscilando alrededor del 0.

Ejercicio 2

1. Consideremos la variable $y = x-t$. Entonces $\dot{y} = \dot{x}-1$ y (E) queda $\dot{y}+1 = y^2+1$, es decir, $\dot{y}=y^2$.

Esta ecuación tiene una solución $y(t)\equiv 0$.

Cuando $y \neq 0$, podemos resolver esta ecuación por el método de variables separables.

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = 1 \iff \frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{y}\right] = \frac{d}{dt}[t] \iff -\frac{1}{y} = t+c$$

para alguna constante $c \iff y = \dfrac{1}{k-t}$ para alguna constante k. $(k=-c)$

Deshaciendo el cambio de variable

- la solución $y\equiv 0$ da $x-t\equiv 0$, es decir, $x(t)=t$.
- una solución $y=\dfrac{1}{k-t}$ da $x(t)=\dfrac{1}{k-t}+t$.

2. $x(0)=1 \iff \dfrac{1}{k}=1 \iff k=1$.

Entonces $\varphi(t)=\dfrac{1}{1-t}+t$, que no está definida en $t=1$.

a) $I=(-\infty,1)$

b) Como $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t)=-\infty$, $\lim\limits_{t\to 1^-}\varphi(t)=+\infty$ y φ es continua, $\varphi(I)=\mathbb{R}$.

Ejercicio 3

1. $e^x-1=0 \iff x=0$

$y e^x=0 \iff y=0$.

El único punto de equilibrio es $(0,0)$.

2. Consideremos
$$E(x,y)=\frac{y}{e^x-1},$$

que está definida en $\mathbb{R}^2-\{(0,y): y\in\mathbb{R}\}$.

Para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, la función $\varphi(t) = (0, y_0 e^t)$ es la única solución de $\begin{cases} \dot{x} = e^x - 1 \\ \dot{y} = y_0 e^x \end{cases}$ con condición inicial $\begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = y_0 . \end{matrix}$

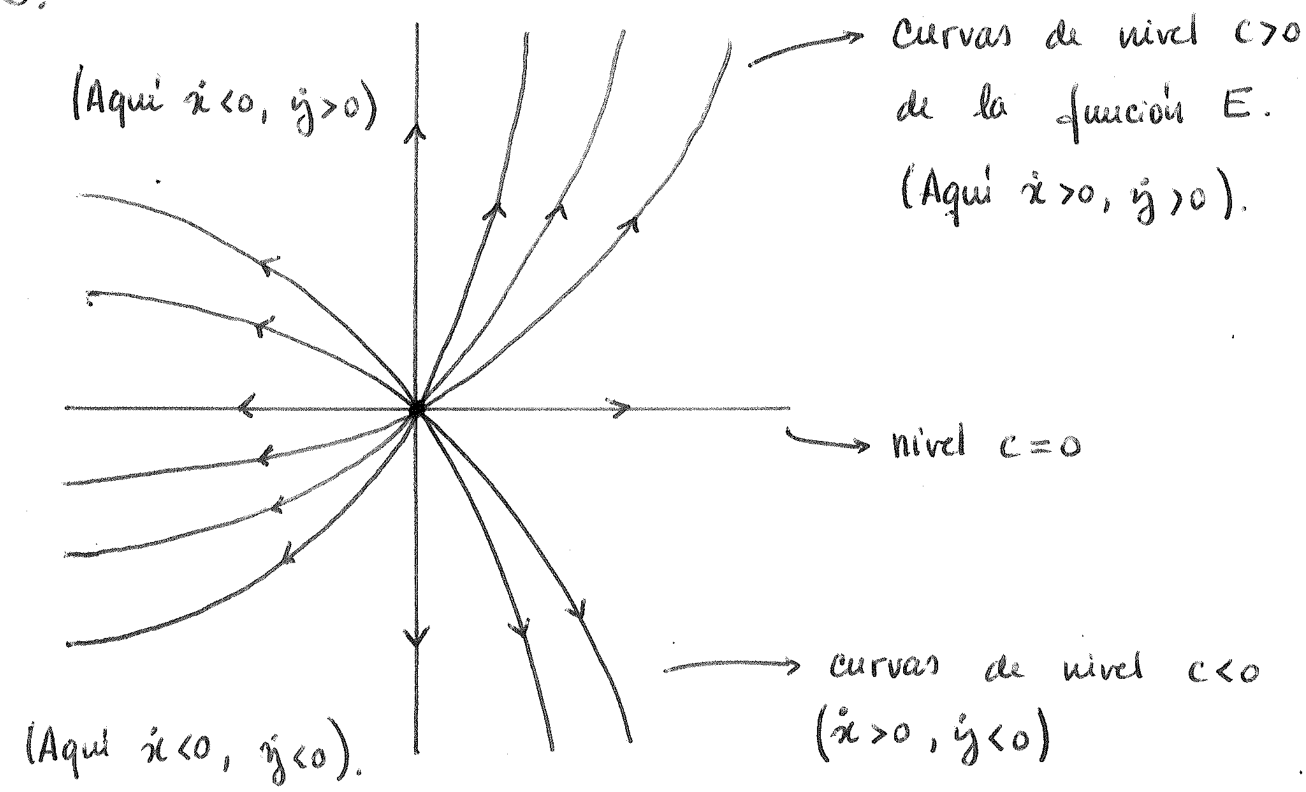
Fuera del eje y está definida la función E. Si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es una solución con condición inicial $\varphi(0) = (x_0, y_0)$,

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = E_x(x(t), y(t))\, \dot{x}(t) + E_y(x(t), y(t))\, \dot{y}(t) =$$

$$= -\frac{y(t)\, e^{x(t)}}{(e^{x(t)} - 1)^2} \cdot (e^{x(t)} - 1) + \frac{1}{e^{x(t)} - 1}\, y(t)\, e^{x(t)} = 0.$$

Esto nos dice que si $E(x_0, y_0) = c$, entonces $E(\varphi(t)) = c \;\; \forall t$, es decir, la solución $\varphi(t)$ está contenida en la curva $y = c\,(e^x - 1)$.

3.



Ejercicio 4

1. Como (t_0, x_0) es un punto interior a $I \times O$, existe un rectángulo $[\alpha_1, \alpha_2] \times \overline{B}(x_0, \beta)$ tal que $(t_0, x_0) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times \overline{B}(x_0, \beta) \subset I \times O$. Como f es continua y $[\alpha_1, \alpha_2] \times \overline{B}(x_0, \beta)$ es compacto, $\|f\|$ es acotada en $[\alpha_1, \alpha_2] \times \overline{B}(x_0, \beta)$. M es una cota de $\|f\|$ en el rectángulo.

2.

$$\| T(\varphi)(t) - x_0 \| = \left\| \cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds - \cancel{x_0} \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\| f(s, \varphi(s)) \|}_{\leq M} ds \right| \leq$$

$$\leq M\, |t - t_0| \leq M \alpha.$$

$$\| T(\varphi)(t_1) - T(\varphi)(t_2) \| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi(s))\, ds - x_0 - \int_{t_0}^{t_2} f(s, \varphi(s))\, ds \right\|$$

$$= \left\| \int_{t_2}^{t_1} f(s, \varphi(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t_2}^{t_1} \underbrace{\| f(s, \varphi(s)) \|}_{\leq M} ds \right| \leq M\, |t_2 - t_1|.$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ si $|t_2 - t_1| < \frac{\varepsilon}{M}$ se tiene que $\| T(\varphi)(t_1) - T(\varphi)(t_2) \| < \varepsilon$.

3. $$\|T(\varphi)-T(\psi)\|_\infty = \sup_{t\in I_\alpha} \|T(\varphi)(t)-T(\psi)(t)\| =$$

$$= \sup_{t\in I_\alpha} \left\| \int_{t_0}^{t} \big(f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))\big)\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in I_\alpha} \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))\|}_{\substack{\wedge\!\!\!/\!/ \\ k(s)\,\|\varphi(s)-\psi(s)\|}} ds \right| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in I_\alpha} \left| \int_{t_0}^{t} k(s) \underbrace{\|\varphi(s)-\psi(s)\|}_{\substack{\wedge\!\!\!/\!/ \\ \|\varphi-\psi\|_\infty}} ds \right| \leq \|\varphi-\psi\|_\infty \sup_{t\in I_\alpha} \left| \int_{t_0}^{t} k(s)\, ds \right|$$

$$\leq \|\varphi-\psi\|_\infty \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} k(s)\, ds \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Schwarz}}}{\leq} \|\varphi-\psi\|_\infty (2\alpha)^{1/2} \left(\int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} k(s)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|\varphi-\psi\|_\infty (2\alpha)^{1/2} \left(\int_{I_1} k(s)^2 \right)^{1/2}$$

Tomando α de modo que

$$(2\alpha)^{1/2} \cdot \left(\int_{I_1} k(s)^2 ds \right)^{1/2} < 1$$

$\left(\text{es decir, } 0 < \alpha < \dfrac{1}{2\int_{I_1} k(s)^2 ds} \right)$, T es una contracción.

4. Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds. \qquad (*)$$

Tomemos α, $\mathcal{F}$ y T como en los incisos anteriores.

φ satisface $(*)$ $\longleftrightarrow$ $T(\varphi) = \varphi$.

Como $\mathcal{F}$ es un espacio métrico completo y T es una contracción, por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única $\varphi \in \mathcal{F}$ tq $T(\varphi) = \varphi$. Esto es, hay una única solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida en $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$.