Ecuaciones Diferenciales
Soluciones examen diciembre

26 de setiembre de 2015.

Ejercicio 1 a) y b) ver teórico.

c) i) $det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2$. El subespacio propio asociado a $\lambda = 1$ es $S_1 = \{(x, y) : y = -2x\}$. Como $dim(S_1) = 1$ entonces A no es diagonalizable y por lo tanto

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\{v_1, v_2\}$ es la base de Jordan entonces $A(v_1) = v_1 + v_2$ y $A(v_2) = v_2$. Entonces sea $v_2 = (1, -2)$ y haciendo cuentas se llega a que $v_1 = (0, -1)$ y por lo tanto

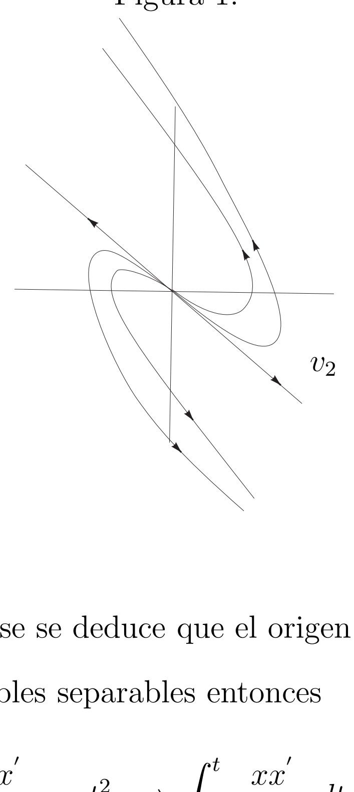
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} \text{ por lo tanto } e^{At} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} P^{-1}.$$

c) ii) La solución es $e^{At}x(0)$.

c) iii) ver figura.

Figura 1:



c) iv) Del diagrama de fase se deduce que el origen es inestable.

Ejercicio 2 1) La ecuación es a variables separables entonces

$$\frac{xx'}{1+x^2} = t^2 \Longrightarrow \int_0^t \frac{xx'}{1+x^2} dt = \int_0^t t^2 dt$$

Como $\int_0^t \frac{xx'}{1+x^2}dt = 1/2log(1+x^2)|_0^t$, usando que $x(0) = 1$ se tiene que

$$\frac{1}{2}log(1+x^2) = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}log(2)$$

de donde despejando se obtiene que

$$x(t) = \sqrt{2e^{\frac{2}{3}t^3} - 1}.$$

Como x está definida para $t \geq 0$, se deduce que el intervalo maximal contiene a $[0, +\infty)$.

2) i) El domoinio de F es $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \neq 0\}$.

2) ii) Como F es de clase C^1 en Ω entonces F verifica las hipótesis del teorema de Picard.

2) iii) Como $\frac{2}{\pi}arctan(x+t) \leq 1$ entonces

$$\frac{1+x^2}{x}t^2 \geq \frac{2}{\pi}\frac{1+x^2}{x}t^2 \arctan{(x+t)}$$

Entonces por el ejercicio 3 del práctico 4 se cumple que $v(t) \leq u(t)$.

2) iv) Como $x = 0$ No está en el dominio de F, y $v(0) = 1$, se tiene que $v(t) > 0$. Luego, para $t > 0$, $v'(t) > 0$ y por lo tanto $v(t)$ es creciente para $t > 0$. Como $v(t) \leq u(t)$ para $t > 0$, por salida de compactos, $u(t)$ tiene que estar definida para todo $t \in [0, +\infty)$.

Ejercicio 3 a) Ver teórico.

b) i) Para $x = 2$ se tiene que $f_n(2)$ no converge. Por lo tanto no hay convergencia puntual y por lo tanto no hay convergencia uniforme.

b) ii) Claramente f_n converge puntualmente a la función $f(x) = 0$ para todo $x \in (1, \sqrt{3})$. Se puede probar fácilmente que

$$sup_{x\in(1,\sqrt{3})}\{|f_n(x)|\} = 1$$

y por lo tanto NO hay convergencia uniforme.
Otra forma es,

dado $\varepsilon \in (0, 1)$ vamos hallar n_0 tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ y probar que No se puede hallar n_0 que sirva para todo $x \in (1, \sqrt{3})$. Entonces

$$|f_n(x)| < \varepsilon \iff |x^2 - 2|^n < \varepsilon \iff log(|x^2 - 2|^n) < log(\varepsilon) \iff n > \frac{log(\varepsilon)}{log(|x^2 - 2|)}$$

Como cuando $x \to \sqrt{3}$ se tiene que $log(|x^2 - 2|) \to 0$ entonces $n \to +\infty$ lo que hace imposible elegir n_0 que sirva para todo $x \in (1, \sqrt{3})$. Entonces no hay convergencia uniforme.