Resolución Primer Parcial Ecuaciones Diferenciales

27 de Setiembre de 2014

---

1. Ejercicio 1

a) Ver teórico.

b) I) La derivada segunda de las soluciones a la ecuación es:

$$\dot{x} = t - e^x \Rightarrow \ddot{x} = 1 - \dot{x}e^x = 1 - e^x(t - e^x)$$

Por lo tanto, si $t < e^x$ resulta que $\dot{x} < 0$ y $\ddot{x} > 0$. Entonces, las soluciones deberán ser decrecientes y con concavidad positiva en la zona $t < e^x$, lo que implica que necesariamente deberán cortar a la curva $t = e^x$.

II) Ya probamos que toda solución maximal corta a la curva $t = e^x$, que es la curva de los puntos críticos. Además, en los puntos críticos, la derivada segunda de las soluciones vale $\ddot{x} = 1$, por lo que serán mínimos. Para probar que hay un único mínimo, basta ver que una vez que la solución ingresa a la zona $t > e^x$ debe tener derivada primera positiva, lo que implica que debe ser creciente. Por lo tanto, no puede existir otro punto de corte con la curva $t = e^x$, ya que este no sería un mínimo.

III) Considerando las funciones:

$$\begin{aligned} f_1(x,t) &= t - e^x \\ f_2(x,t) &= -e^x \end{aligned}$$

se tiene que $f_1(x,t) < f_2(x,t)\ \forall (x,t)$ con $t < 0$. Por lo tanto, siendo $\varphi_1(t)$ solución de $\dot{x} = f_1(x,t)$ y $\varphi_2(t)$ solución de $\dot{x} = f_2(x,t)$, resulta:

$$\dot{\varphi_1}(t) < \dot{\varphi_2}(t) \text{ si } t < 0$$

Entonces, para $t < t_0 < 0$:

$$\int_t^{t_0} \dot{\varphi_1}(t)\,dt < \int_t^{t_0} \dot{\varphi_2}(t)\,dt \Rightarrow \varphi_1(t_0) - \varphi_1(t) < \varphi_2(t_0) - \varphi_2(t)$$

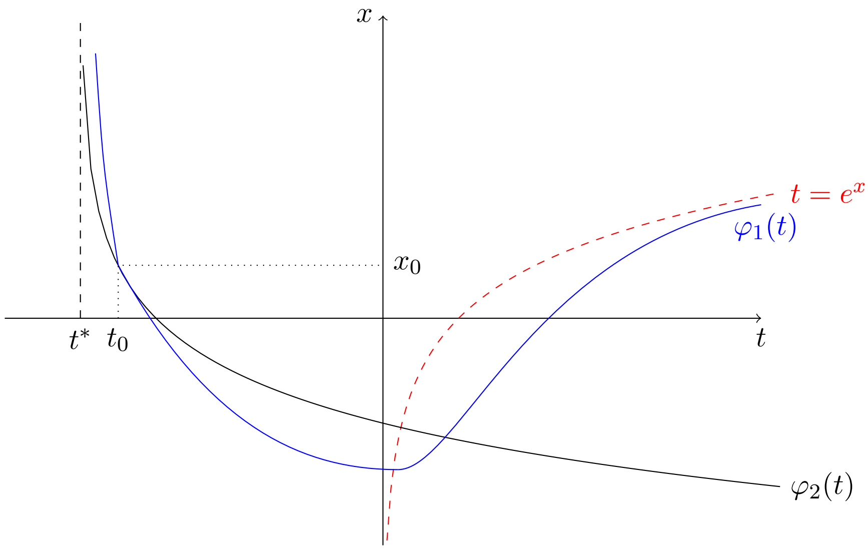
Si además se cumple que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, resulta:

$$-\varphi_1(t) < -\varphi_2(t) \Rightarrow \varphi_1(t) > \varphi_2(t)\ \forall t < t_0 < 0$$

Ahora, las soluciones de la ecuación $\dot{x} = f_2(x,t) = -e^x$ con $x(t_0) = x_0$ son:

$$\varphi_2(t) = -\log(t - t_0 + e^{-x_0})$$

que están definidas para todo $t > t^* = t_0 - e^{-x_0}$. Por lo tanto, como $\varphi_1(t)$ tiene que ser mayor que $\varphi_2(t)$ para todo $t < t_0$, $\varphi_1(t)$ no puede estar definida para $t \leq t^*$. Entonces, el intervalo maximal de $\varphi_1(t)$ tiene que ser de la forma $(\alpha, \beta]$ o $(\alpha, +\infty)$.



Para ver que el intervalo maximal es efectivamente de la forma $(\alpha, +\infty)$ hay que notar que una vez que la solución ingresa a la zona $t > e^x$, se mantiene siempre dentro de ella. Esto se debe a que en dicha zona la función debe ser creciente y si hubiese un corte con $t = e^x$ este no sería un mínimo. Además, con un desarrollo similar al anterior se llega a que $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ para todo $t > t_0 > 0$.

Por lo tanto, dados $t_0 < a < b$, se define el compacto $K = [a, b] \times [\varphi_2(b), \log(b)]$ como en la figura 1. Por escape de compactos, el gráfico de la solución se escapa de K. Para el futuro, debido a la acotación de $\varphi_1(t)$, el gráfico debe escaparse por el lado del tiempo. Como este desarrollo sirve para todo $b > t_0$, resulta que la solución debe estar definida en un intervalo de la forma $(\alpha, +\infty)$.

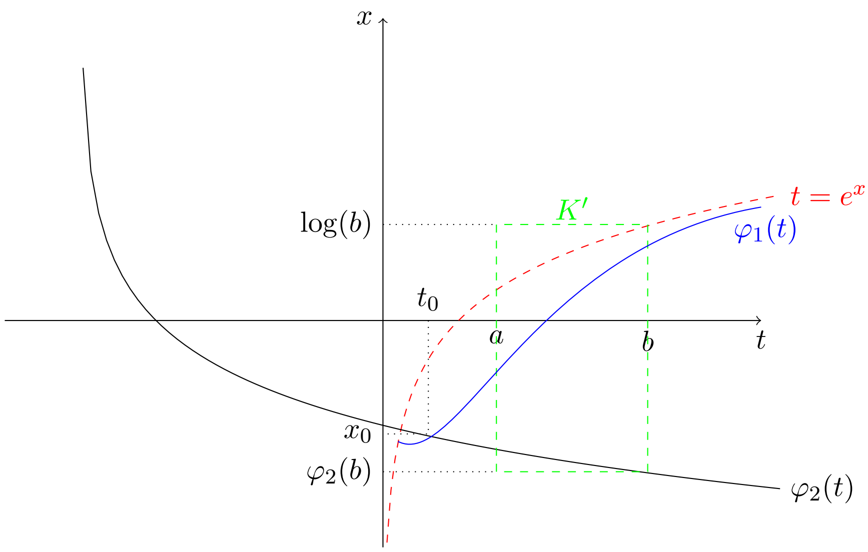


Figura 1: Compacto K.

2. Ejercicio 2

a) Definiendo una nueva variable bidimensional $X(t) = (x(t), y(t))$, con $y(t) = \dot{x}(t)$, el sistema de dimensión 2 obtenido es:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} X$$

que está en las condiciones de Picard, ya que, dada una matriz cuadrada A, la función $f(X,t) = AX$ es $\mathcal{C}^1$, y por lo tanto localmente Lipschitz respecto a la variable X.

b) Ver teórico.

c) Calculemos los valores propios de la matriz del sistema:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + k\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$$

Se distinguen entonces 3 casos:

- Si $k > 2$, hay 2 valores propios reales distintos. Está claro que el valor propio

$$\lambda_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2-4}}{2}$$

es negativo. El valor propio restante

$$\lambda_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2-4}}{2}$$

también será negativo ya que $-k + \sqrt{k^2 - 4} < 0$ para todo $k \geq 2$. Por lo tanto, todas las órbitas de los diagramas de fase tenderán asintóticamente a 0. En la figura 2 se muestra un bosquejo del diagrama para este caso.

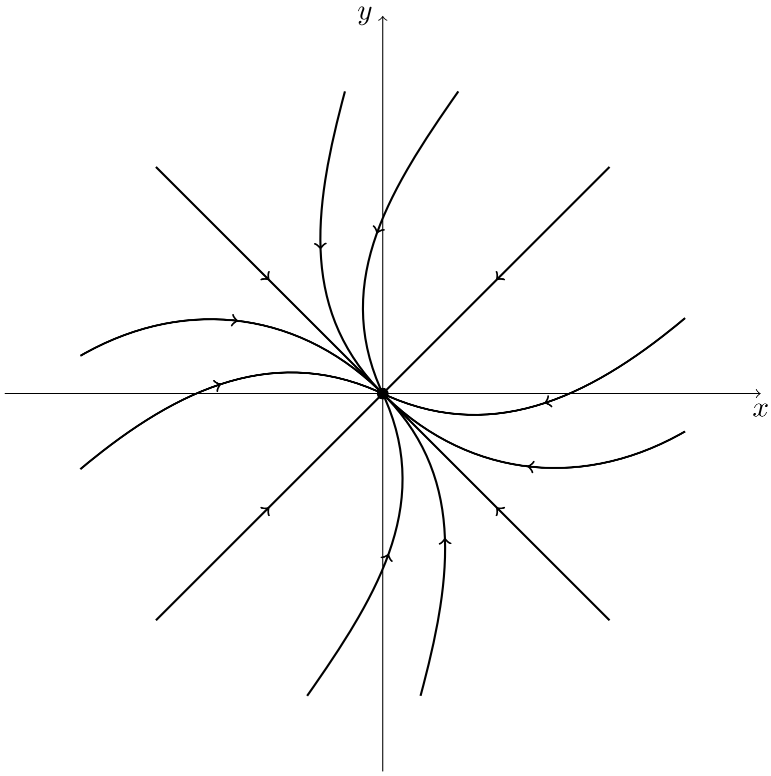


Figura 2: Diagrama de fase para el caso $k > 2$.

- Si $k = 2$, hay un único valor propio doble $\lambda = -1$. Como este es negativo, las órbitas del diagrama de fase tenderán asintóticamente a 0. En la figura 3 se muestra un esbozo del diagrama para este caso.

- Si $0 < k < 2$, hay 2 valores propios complejos conjugados:

$$\lambda = \frac{-k \pm i\sqrt{4 - k^2}}{2}$$

Es claro que ambos tienen parte real negativa por lo que, de nuevo, las órbitas de los diagramas de fase tenderán asintóticamente a 0. La diferencia en este caso es que las órbitas girarán alrededor del origen, como en el diagrama de la Figura 4.

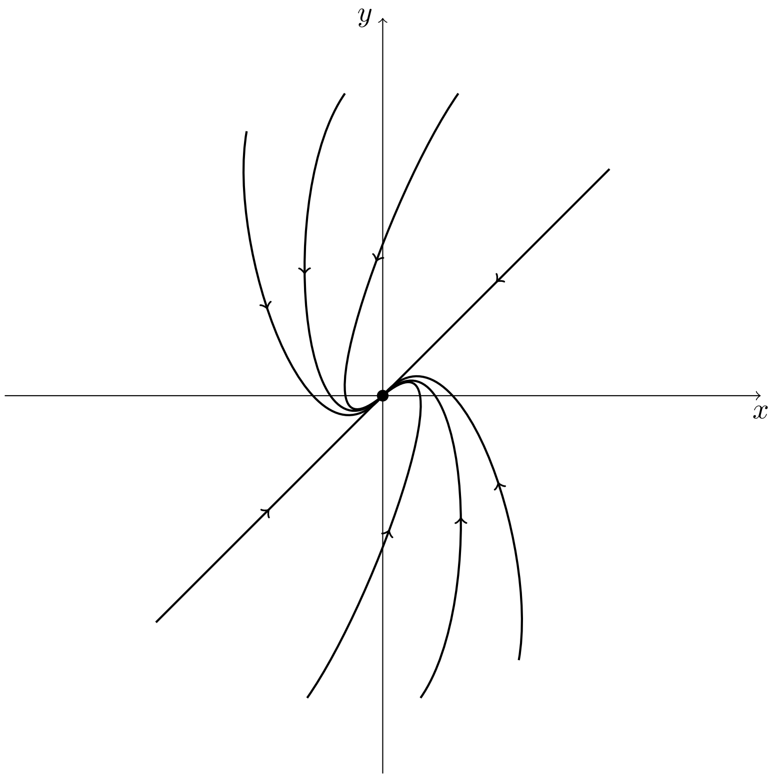


Figura 3: Diagrama de fase para el caso $k = 2$.

d) En cualquiera de los casos, los diagramas de fase tienden asintóticamente a 0. Esto implica que la partícula tiende a volver a la posición inicial a medida que avanza el tiempo. Además, en todos los casos el origen es punto de equilibrio, lo que es razonable: si la partícula comienza en una posición de equilibrio ($x_0 = 0$) y sin velocidad inicial ($\dot{x}_0 = 0$), se mantiene en la misma posición. Otra característica a destacar es que la variable auxiliar $y = \dot{x}$ mide la velocidad de la partícula en función del tiempo. Que todos los diagramas de fase tiendan al origen implica entonces que la partícula no sólo tiende a volver a la posición de equilibrio, sino que lo hace disminuyendo su velocidad hasta que se hace 0.

En cuanto a las diferencias entre los distintos casos, en el caso k menor a 2, el hecho de que la solución se "enrolle" alrededor del origen indica que la partícula está frenando pero cambiando de velocidad positiva a negativa. Esto significa que la partícula va en las dos direcciones a velocidades que van disminuyendo hasta llegar a la posición de equilibrio. Hay un movimiento que oscila y va frenándose. En cambio, cuando k es mayor que 2 el rozamiento es lo suficientemente grande como para que la partícula se acerque a la posición

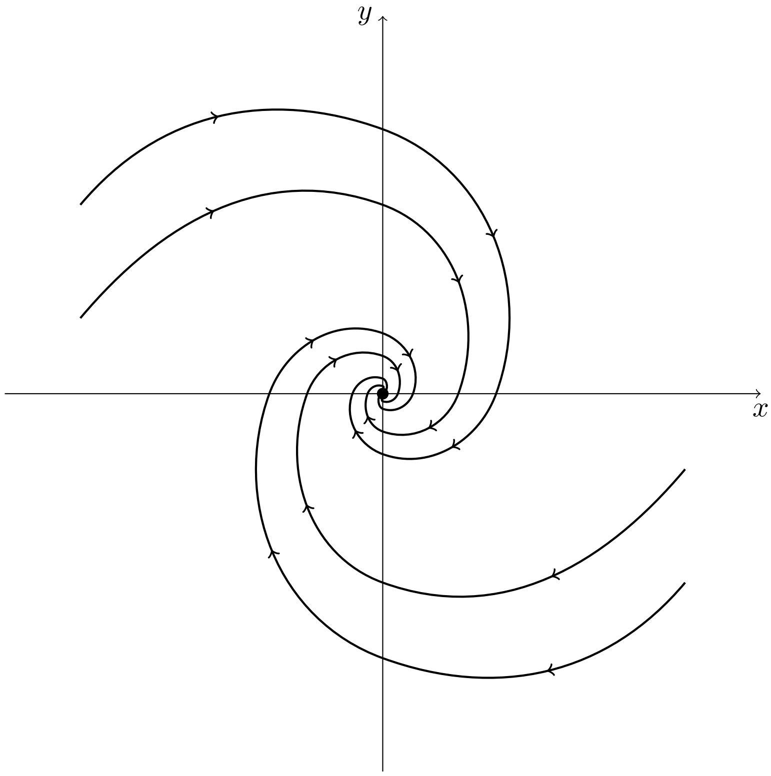


Figura 4: Diagrama de fase para el caso $0 < k < 2$.

de equilibrio sin ningun tipo de oscilación .

3. Ejercicio 3

a) Como X es un conjunto finito, puede definirse:

$$m = \min_{p \neq q} \{|f(x_p) - f(x_q)|\}$$

Además, como la función f es inyectiva, resulta $m > 0$. Se considera entonces la bola de centro f y radio $\epsilon = \frac{m}{4}$. Sea $g : X \to \mathbb{R}$ en dicha bola, es decir:

$$d(f,g) < \epsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \epsilon$$

Lo que implica que $|f(x) - g(x)| < \epsilon \; \forall x \in X$.

Sea $p \neq q$. Aplicando desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} |f(x_p) - f(x_q)| &\leq |f(x_p) - g(x_p)| + |g(x_p) - g(x_q)| + |g(x_q) - f(x_q)| \\ \Rightarrow |g(x_p) - g(x_q)| &\geq |f(x_p) - f(x_q)| - |f(x_p) - g(x_p)| - |g(x_q) - f(x_q)| \end{aligned}$$

Por la propia definición de m resulta $|f(x_p) - f(x_q)| \geq m$. Además, como $|f(x) - g(x)| < \epsilon$, entonces $-|f(x) - g(x)| > -\epsilon = -\frac{m}{4}$ $\forall x \in X$, y por lo tanto:

$$|g(x_p) - g(x_q)| \geq m - \frac{m}{4} - \frac{m}{4} \Rightarrow |g(x_p) - g(x_q)| \geq \frac{m}{2} > 0$$

Entonces $g(x_p) \neq g(x_q)$ si $p \neq q$, es decir, g es inyectiva y por lo tanto el conjunto es abierto.

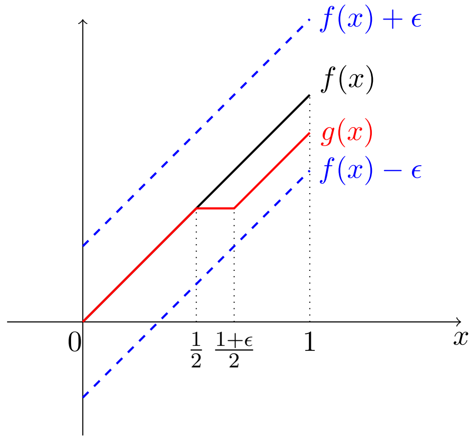
b) Considerando $X = [0,1]$, entonces el conjunto de las funciones inyectivas no es abierto en $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Para probarlo, consideremos la función inyectiva y acotada:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \,/ f(x) = x$$

Probaremos que dicha función no es interior al conjunto de las inyectivas. En efecto, dado $\epsilon \in (0,1]$, la función:

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1+\epsilon}{2} \\ x - \frac{\epsilon}{2} \text{ si } \frac{1+\epsilon}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

pertenece a la bola de centro f y radio ϵ, pero no es inyectiva.



En el caso que sea $\epsilon > 1$, alcanza con definir:

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Otra forma de probarlo es ver que el $[0,1]$ es no numerable, y aplicar el ejercicio 6 del práctico 2 (Si X es un conjunto no numerable, el conjunto de funciones inyectivas $f : X \to \mathbb{R}$ tiene interior vacío en $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$).