1^{er} PARCIAL ECUACIONES DIFERENCIALES 2013

PROBLEMA 1

A $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f \in C^1$
$\exists\ K > 0 \ / \ \{\|f(x)\| : x \in \mathbb{R}^2\} \subset [-K, K]$

SE CONSIDERA $\dot{x} = f(x)$ MOSTRAR QUE LAS SOLUCIONES ESTAN DEFINIDAS PARA TODO $t \in \mathbb{R}$.

RESOLVER EL P.V.I $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ ES EQUIVALENTE

A RESOLVER LA E.I.
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,ds$$

TOMANDO NORMA Y USANDO PROPIEDADES CONOCIDAS, LLEGAMOS A:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(x(s))\|\,ds$$

AHORA, COMO $\|f(x)\|$ ESTA ACOTADA, PODEMOS SEGUIR ACOTANDO LA EXPRESION ANTERIOR

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + K(t - t_0) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

ANTES DE SEGUIR, CABE DESTACAR QUE $f \in C^1$ Y POR LO TANTO $f \in Lip$.

** ES DECIR f ESTA BAJO LAS HIPÓTESIS DEL TEO DE PICARD, Y EL TEO DE ESCAPE DE COMPACTOS

ESTO IMPLICA QUE SI CONSIDERAMOS $x(t)$ SOL MAXIMAL ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ESTA NO PUEDE ESTAR CONTENIDA EN NINGÚN COMPACTOS

** ENTONCES, PARA PROBAR QUE LAS SOLUCIONES ESTAN DEFINIDAS PARA TODO $t \in \mathbb{R}$, SUPONEMOS POR ABSURDO QUE EL INTERVALO MAXIMAL ES EL INTERVALO ACOTADO: $I = [a, b]$

RECORDANDO LA EXPRESIÓN A LA CUAL HABÍAMOS LLEGADO:

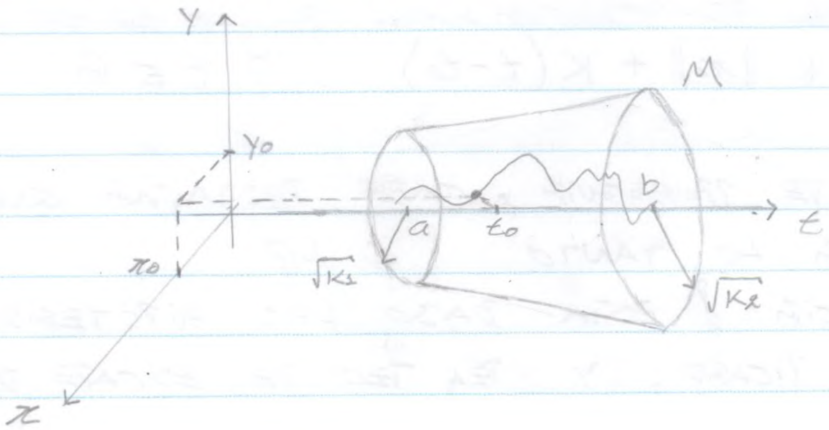
$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + K(t - t_0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

POR LO TANTO, EN EL INTERVALO I, RESULTA:

- $\|x(a)\| \leq \|x_0\| + K(a - t_0) = K_1$
- $\|x(b)\| \leq \|x_0\| + K(b - t_0) = K_2$

CONSIDERAMOS EL COMPACTO DEFINIDO POR I, Y LAS COTAS ANTERIORES (M)

A MODO DE EJEMPLO, SI TRABAJAMOS CON LA NORMA EUCLIDEA EL COMPACTO A CONSIDERAR ES:



DE ESTA FORMA, RESULTA QUE $x(t)$ ESTA CONTENIDA EN EL COMPACTO M, LO CUAL ES ABSURDO

** AHORA, COMO VIMOS, $x(t)$ ESTÁ ACOTADA ESPACIALMENTE POR LO QUE LA SOLUCIÓN SE ESCAPA TEMPORALMENTE

ES DECIR, ES ABSURDO SUPONER QUE EL INTERVALO MAXIMAL ESTA ACOTADO, Y POR LO TANTO LAS SOLUCIONES ESTAN DEFINIDAS PARA TODO $t \in \mathbb{R}$

(B) $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

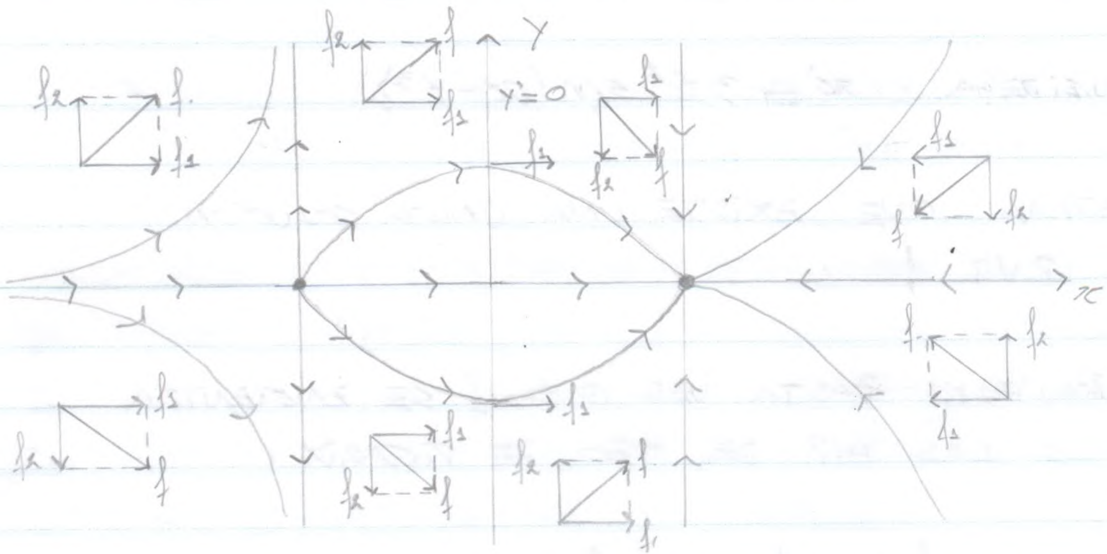
BUSQUEJAR LAS SOLUCIONES DE $x' = f(x)$ A PARTIR DE LOS DATOS.

- EL SISTEMA A CONSIDERAR ES $\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$

** POR LO TANTO, A PARTIR DEL ESTUDIO DEL SIGNO DE f_1 Y f_2 OBTENEMOS DE MANERA CUALITATIVA EL CRECIMIENTO DE x E y.

ESTO NOS PERMITE BOSQUEJAR EL DIAGRAMA DE FASE.

DE ESTA FORMA.



(C) PARA PROBAR QUE f NO ES UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL, BASTA VER QUE:

$$f(0,0) = (f_1(0,0), 0) \neq \theta$$

PROBLEMA 2

SE CONSIDERA $x' = 3t^2 \operatorname{sen}(x - t^3)$

(A) MOSTRAR QUE EXISTE UNA ÚNICA SOLUCIÓN AL P.V.I.

PARA ELLO BASTA VER QUE f SE ENCUENTRA EN LAS HIP. DEL TEO DE PICARD.

AHORA, $f \in C^1 \Rightarrow f \in Lip$ ✓

(B) ENCONTRAR SOL. DE LA FORMA $x(t) = at^3 + b$

$x(t)$ DEBE SATISFACER LA ECUACIÓN:

$$\Rightarrow 3a t^2 = 3t^2 \operatorname{sen}(at^3 + b - t^3)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{a = 1}$$

$$\rightsquigarrow \cancel{3}t^2 = \cancel{3}t^2 \operatorname{sen}(b) \rightsquigarrow \operatorname{sen}(b) = 1$$

$$\rightsquigarrow \boxed{b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = t^3 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(C)

LAS SOLUCIONES ANTERIORES CLARAMENTE ESTAN DEFINIDAS PARA TODO $t \in \mathbb{R}$

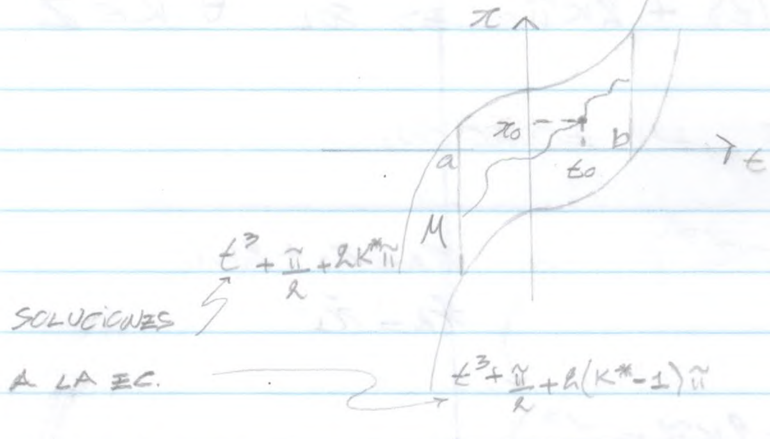
RESTA VER QUE LAS SOLUCIONES QUE ESTAN COMPRENDIDAS ENTRE LAS ANTERIORES, TAMBIEN ESTAN DEFINIDAS PARA TODO $t \in \mathbb{R}$

ES DECIR DADA UNA CI (t_0, x_0) QUE <u>NO</u> VERIFIQUE $x_0 = t_0^3 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ PARA NINGÚN

$k \in \mathbb{Z}$

SI EXISTE K^* DE MANERA QUE:

$$t_0^3 + \frac{\pi}{2} + 2K^*\pi < x_0 < t_0^3 + \frac{\pi}{2} + 2(K^*-1)\pi$$



ANTES QUE NADA, RECORDAMOS QUE f ESTA BAJO LAS HIP DEL TEO DE PICARD Y POR ENDE BAJO LAS HIP DE TEO DE ESCAPE DE COMPACTOS

RAZONANDO DE MANERA ANÁLOGA AL PROBLEMA 1
SUPONEMOS POR ABSURDO QUE EL INTERVALO MAXIMAL
ES UN INTERVALO ACOTADO $I = [a, b]$, Y
CONSIDERAMOS EL COMPACTO M DE LA FIGURA.

COMO VIMOS LAS SOLUCIONES ~~~~ SON ÚNICAS,
POR LO TANTO LA SOLUCIÓN $x(t)$ CON CI (t_0, x_0)
NO PUEDE INTERSECTAR LAS CURVAS:

$$t^3 + \frac{\pi}{2} + 2K^*\pi \quad \text{NI} \quad t^3 + \frac{\pi}{2} + 2(K^*-1)\pi$$

RESULTA ENTONCES QUE $x(t)$ ESTA CONTENIDA
EN EL COMPACTO M, Y ESTO ES ABSURDO.

POR LO TANTO, EL INTERVALO MAXIMAL NO ESTA
ACOTADO Y RESULTA QUE $x(t)$ ESTA DEFINIDA
PARA TODO $t \in \mathbb{R}$

D) x_2 DEBE VERIFICAR LA ECUACIÓN:

$$\dot{x}_2 = 3t^2 \operatorname{sen}(x_2 - t^3)$$

$$x_2 = x_1 + 2k\pi$$
$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_1 = 3t^2 \operatorname{sen}(x_1 + 2k\pi - t^3)$$

$$\operatorname{sen}(a) = \operatorname{sen}(a + 2k\pi)$$

$$\dot{x}_1 = 3t^2 \operatorname{sen}(x_1 - t^3)$$

ENTONCES COMO x_1 ES SOLUCIÓN, x_2 TAMBIEN
LO ÉS.

(E) HALLAR L.G. DE LOS PTOS CRÍTICOS Y CLASIFICARLOS

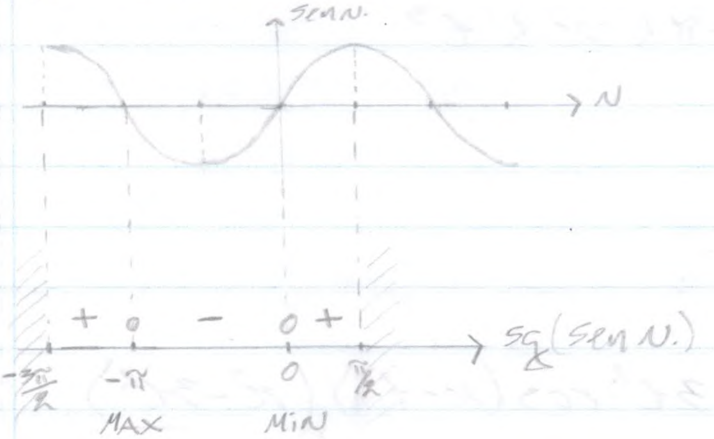
▶ $\dot{x} = 0$: $3t^2 \operatorname{sen}(x - t^3) = 0$

$\rightarrow \boxed{t = 0}$

$\rightarrow \operatorname{sen}(x - t^3) = 0 \rightarrow x - t^3 = k\pi$

$\rightarrow \boxed{x = t^3 + k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

▶ CLASIFICACIÓN



OBS: LOS PUNTOS DONDE EL sen N = 1 CORRESPONDEN A LAS SOLUCIONES HALLADAS EN LA PARTE (B)

EN PRIMER LUGAR, PARA ~~[illegible]~~ CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS CONSIDERAMOS QUE LOS MÁXIMOS SE DAN CUANDO "$\dot{x}$ CAMBIA DE SIGNO ⊕ A ⊖"

ESTO ES, "CUANDO $\operatorname{sen}(x - t^3)$ CAMBIA DE SIGNO ⊕ A ⊖" Y POR LO TANTO PARA MULTIPLOS IMPARES DE π, POR LO TANTO:

$x = t^3 + (2k+1)\pi$ CORRESPONDEN A MÁXIMOS

DE LA MISMA FORMA:

$x = t^3 + 2k\pi$ CORRESPONDEN A MÍNIMOS

EN LA FIGURA, SE ESTUDIÓ EL SIGNO DEL SENO (Y POR ENDE DE x') PARA LA REGIÓN COMPRENDIDA ENTRE LAS CURVAS SOLUCIONES:

$$t^3 + \frac{\pi}{2} \quad y \quad t^3 - \frac{3\pi}{2}$$

DE ESTA FORMA:

$x' > 0$ sii $t^3 - \frac{3\pi}{2} < x < t^3 - \pi$

$$t^3 < x < t^3 + \frac{\pi}{2}$$

$x' < 0$ sii $t^3 - \pi < x < t^3$

QUE PASO CON $\underline{t=0}$?

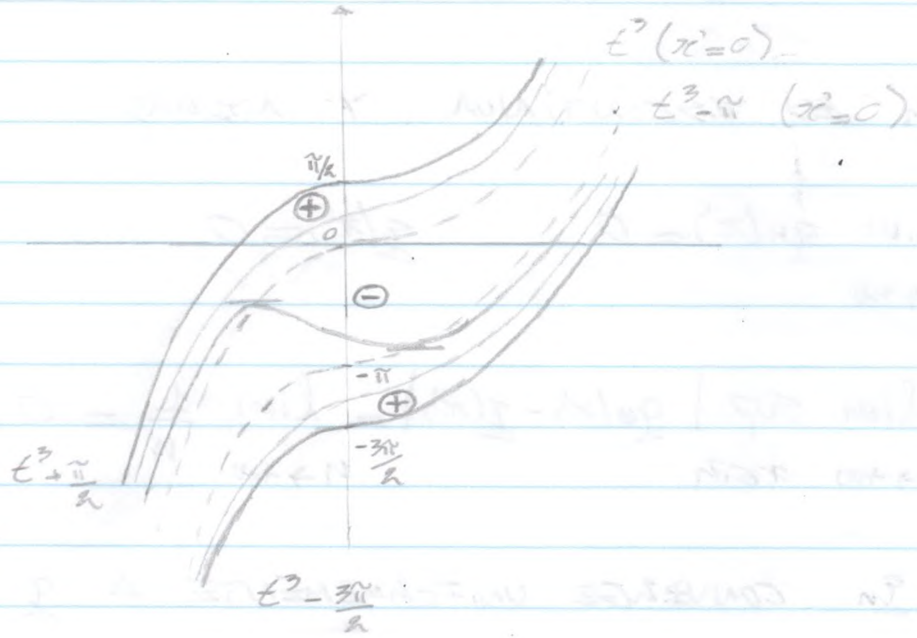
$$x'' = 6t \operatorname{sen}(x - t^3) + 3t^2 \cos(x - t^3)(x' - 3t^2)$$

SE PUEDE VER QUE PARA $t=0$, $x''(0) = 0$

$\Rightarrow t=0$ ES UN P^TO DE INFLEXIÓN

(F) POR LO VISTO EN LA PARTE (D), BASTA REALIZAR EL GRÁFICO PARA LA REGIÓN ANTES MENCIONADA YA QUE LAS SOLUCIONES SON $2k\pi$ PERIÓDICAS EN LA VARIABLE ESPACIAL.

ASÍ, CONSIDERANDO LA INFORMACIÓN OBTENIDA EN LAS RESTANTES PARTES



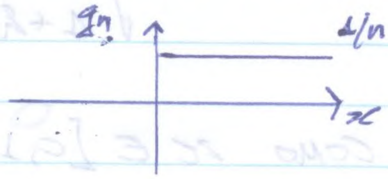
PROBLEMA 3

(A) VER TEÓRICO

(B) VER TEÓRICO

(C) SÍ, BASTA CONSIDERAR EL SIGUIENTE EJEMPLO

$$g_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



g_n ES DISCONTINUA, Y ADEMÁS

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = 0 \qquad g(x) \equiv 0$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

g_n CONVERGE UNIFORMEMENTE A g CONTINUA

(D)

▶ $f_n(x) = n^k x (1 - x^k)^n \qquad I = [0, 1]$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$

$\rightsquigarrow$ VEAMOS SI CONVERGE UNIFORMEMENTE, PARA ELLO CALCULEMOS EL SUPREMO DE $f_n(x)$

$$f'_n(x) = n^2\left[(1-x^2)^n + n(1-x^2)^{n-1}(-2x^2)\right]$$

$$f'_n(x) = n^2(1-x^2)^{n-1}(1-x^2-2nx^2) = 0$$

* $x = \pm 1$

* $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1+2n}}$

COMO $x \in [0,1]$ Y ADEMAS $f_n(1)=0$, EL SUPREMO SE DA PARA

$$x=\sqrt{\frac{1}{1+2n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{\frac{1}{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{n}{1+2n}}}_{\sqrt{1/2}}\underbrace{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n}_{\sqrt{1/e}} = \sqrt{\frac{1}{2e}} \neq 0$$

$$\boxed{\text{RECORDAR: } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e}$$

POR LO TANTO $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)\equiv 0$

▶ $h_n(x) = n x^n (1-x) \qquad I = [0,1]$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$

$\rightsquigarrow$ VEAMOS EL SUPREMO DE $h_n(x)$

$$h_n'(x) = n\left[n x^{n-1}(1-x) - x^n\right]$$

$$h_n'(x) = n x^{n-1}\left[n(1-x) - x\right] = 0$$

* $x = 0$

* $x = \dfrac{n}{n+1}$

COMO $h_n(0) = 0$, EL SUPREMO SE DA EN

$$x = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |h_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n\frac{1}{n+1}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\downarrow\, 1/e} = \frac{1}{e} \neq 0$$

POR LO TANTO $h_n(x) \not\rightrightarrows h(x) \equiv 0$