Primer parcial Ec. Dif 2012. Solución.

Ejercicio 1

1. Ver teórico.
2. - Los valores propios de A son 1 y 3 con vectores propios asociados $v = (1,0)$ y $w = (1,1)$, respectivamente. Diagrama de fase: ver Figura 1.
   - La matriz B tiene a 0 como valor propio doble con $mg(0) = 1$. Resolviendo la ecuación se puede ver que la solución que empieza por (x_0, y_0) es $(x(t), y(t)) = (x_0, x_0 t + y_0)$. Diagrama de fase: ver Figura 2.
   - La matriz C tiene valores propios complejos $\lambda = 1 + i$ y $\bar{\lambda} = 1 - i$ y es una rothomotecia. Diagrama de fase: ver Figura 3.

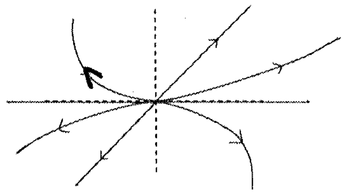


Figura 1: $x' = Ax$

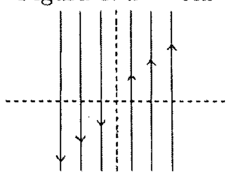


Figura 2: $x' = Bx$

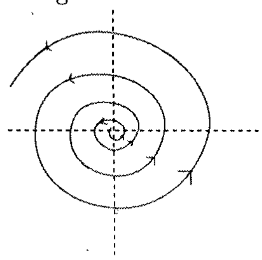


Figura 3: $x' = Cx$

3. Se tiene que:

$$e^{Ct} = e^t \begin{pmatrix} cos(t) & sen(-t) \\ sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Se tiene la ecuación $(x, y)' = f(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$, donde $f(x, y) = (2x^2 + xy, -2xy - y^2)$.

1. Puntos críticos.

   $$(0,0) = f(x,y) = (2x^2 + xy, -2xy - y^2) = (x[2x + y], -y[2x + y]) \textit{ si y solo si } 2x + y = 0.$$

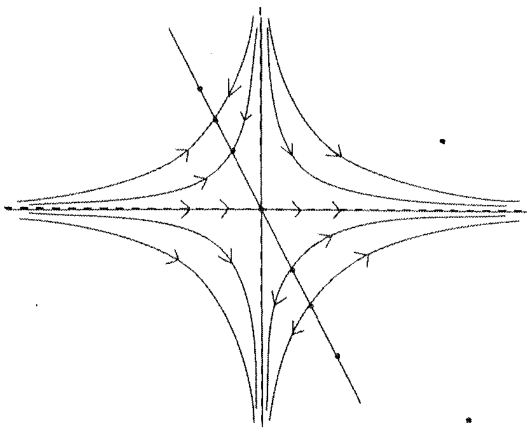
   De modo que los puntos críticos están sobre la recta $2x + y = 0$.

2. Sea $H(x, y) = xy$. Se tiene que: $\dot{H}(x, y) =$

   $$< \nabla H(x,y), f(x,y) >=< (y,x), (2x^2 + xy, -2xy - y^2) >= 2x^2y + xy^2 - 2x^2y - xy^2 = 0.$$

   Entonces, H es una pre-integral para el campo f.

3. Dibujando las curvas de nivel de H y los sentidos de las trayectorias de la ecuación, se puede construir el diagrama de fase y ver que los puntos de equilibrio, que son de la forma $(x, -2x)$ son estables para $x < 0$ e inestables si $x \geq 0$. Observar que si $x < 0$ entonces $(x, -2x)$ es estable pero no asintóticamente estable, porque en todo entorno de radio ϵ de $(x, -2x)$ se puede tomar un punto de la forma $(x + a, -2(x + a))$ con $a > 0$ arbitrariamente pequeño (demodo que $(x + a, -2(x + a))$ esté arbitrariamente cerca de $(x, -2x)$) y la trayectoria que comienza en $(x + a, -2(x + a))$ no converge a $(x, -2x)$ porque $(x + a, -2(x + a))$ es un punto de equilibrio.



Ejercicio 3

1. Teórico ver página.....

2. $$\lim_n f_n(x) = \lim(\cos x)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 2k\pi \\ \nexists \text{ si } x = (2k+1)\pi \\ 0 \text{ si } x \neq k\pi \end{cases}$$

3. Entonces, no existe el límite puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$. (Observar que por la definición de límite puntual de sucesiones de funciones, si $\{f_n\}$ fuese puntualmente convergente, debería existir una función f tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, PARA TODO x EN EL DOMINIO ($= \mathbb{R}$). Como $\nexists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para $x = (2k+1)\pi$ entonces no existe el límite puntual.) En consencuencia, $\{f_n\}$ tampoco puede ser uniformemente convergente.

4. En el intervalo $(0,\pi)$ se ve en la parte 2 que $\lim_n f_n(x) = 0$ $\forall x \in (0,\pi)$ en consecuencia si converge uniformemente lo hace a la función nula. Pero se sabe que f_n converge uniformemente a f si y solo si

   $$M_n = sup_{x\in(0,\pi)}|f_n(x)| \to 0$$

   Ahora
   $$M_n = sup_{x\in(0,\pi)}|f_n(x)| = sup_{x\in[0,\pi]}|f_n(x)| = 1$$

   y por lo tanto f_n no converge uniformente tampoco en $(0,\pi)$