Soluciones primer parcial ecuaciones diferenciales.
1/10/2011

Ejercicio 1. a) Ver Teórico.

b) Ver Teórico.

c) El único punto crítico es el origen. Los valores propios de la matriz A son 3 y 1, por lo tanto ya se puede deducir que el $(0,0)$ es un punto inestable. Luego, utilizando el ejercicio 6 del práctico 4, se deduce que toda órbita es inestable (el ejercicio debe estar demostrado). Para el diagrama de fase ver figura 1 (a).

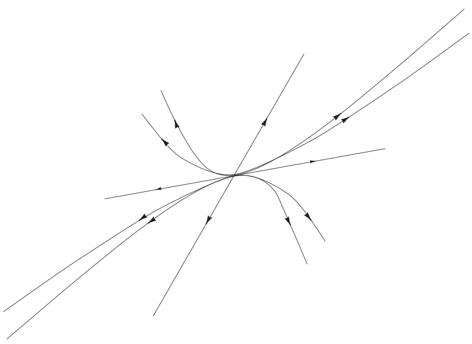
Ejercicio 2. a) Los puntos críticos son de la forma $k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Para el diagrama de fase ver figura 1 (b).

b) Sea $x(t)$ la solución con $x(t_0) = x_0$. Si $x_0 = k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, $x(t) = k\pi$, para todo $t \in \mathbb{R}$ (solución constante definida en todo $\mathbb{R}$). Si $x_0 \neq k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\pi < x_0 < (n+1)\pi$ y la solución $x(t)$ verifica $n\pi < x(t) < (n+1)\pi$, ya que, por el teorema de Picard $x(t)$ no puede cortar las rectas solución. Tomando el conjunto compacto $K = [a,b] \times [n\pi, (n+1)\pi]$ y utilizando el teorema de salida de compactos, se tiene que existen $t_1 < t_0$ y $t_2 > t_0$ tales que $(t_1, x(t_1)) \notin K$ y $(t_2, x(t_2)) \notin K$, siendo t_1, $t_2 \in I$, intervalo maximal. Como $x(t) \in [n\pi, (n+1)\pi]$, para todo $t \in I$, entonces $t_1 < a$ y $t_2 > b$, por lo tanto el intervalo maximal es $\mathbb{R}$.

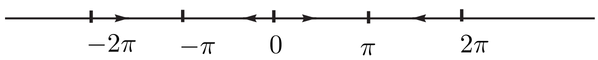
Ejercicio 3. a) $\dot{H} = -nx^{n-1}y + nx^n + 2xy - 2x^2$. Basta tomar $n = 2$ y H resulta una preintegral.

b) Los puntos de equilibrio están en la recta $y = x$.

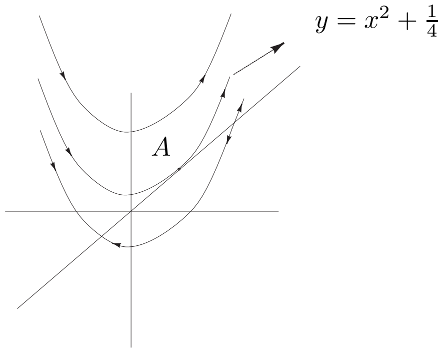
c) Probamos que para $n = 2$, H es una preintegral. Este hecho tiene como consecuencia inmediata que las órbitas del sistema deben estar contenidas en las curvas de nivel de H. Podemos deducir de esto y del diagrama de fase que los puntos (x,x), con $x \geq \frac{1}{2}$ son inestables y los puntos (x,x) con $x < \frac{1}{2}$ son estables (no asintóticamente). Ver figura 1 (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 1.