1. Antes de probar nada, vale aclarar que la función $f(t,x) = e^{x^4}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto entra en las hipótesis del teorema de Picard y el de escape de compactos.

   a) 1) Si φ es solución de la ecuación, entonces $\varphi'(t) = e^{\varphi(t)^4}$ para todo $t \in (a,b)$. Por lo tanto $\psi'(t) = \varphi'(-t) = e^{\varphi(-t)^4} = e^{(-\varphi(-t))^4} = e^{\psi(t)^4}$ para todo $t \in (-b,-a)$, o sea que ψ es solución a la ecuación.
   Para el recíproco, basta observar que $\varphi(t) = -\psi(-t)$.

   2) Si tenemos la solución φ_0, entonces $\psi(t) = -\varphi_0(-t)$ es también solución. Usando Picard, tenemos $\psi = \varphi_0$ y $a = -b$.

   3) Si φ_0 no está definida en $t = 1$, no hay nada que probar. En caso que φ_0 esté definida hasta tiempo 1, tenemos entonces que $\varphi_0(1) > 0$ (porque su derivada es positiva en todo momento y $\varphi_0(0) = 0$). La función $e^{x^4} > x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que la solución a $x' = x^2, x(1) = \varphi_0(1)$ es menor que φ_0. La solución a $x' = x^2$ con $x(1) > 0$ es $\theta(t) = -1/t - k$, con $k > 1$ y $lim_{t\to k^-}\theta(t) = \infty$, así que en caso de estar φ_0 definida en $(-k,k)$ se tiene $lim_{t\to k^-}\varphi_0(t) = \infty$.
   Tenemos entonces que el dominio de φ_0 es $(-a,a)$ con $a \in \mathbb{R}$. Al estar definida la función e^{x^4} en todo $\mathbb{R}^2$ se tiene (por escape de compactos) que φ_0 no puede estar acotada. Como φ_0 es creciente, se obtiene que $lim_{t\to a}\varphi_0(t) = \infty$. Como $\varphi_0(0) = 0$ y φ_0 es estrictamente creciente, se obtiene (utilizando la continuidad) que φ_0 es biyección entre $[0,a)$ y $[0,\infty)$. Utilizando que φ_0 es impar concluimos que $\varphi_0 : (-a,a) \to \mathbb{R}$ es biyección.

   4) Sea $\Upsilon(t) = \varphi_0(t - t_0 + \varphi_0^{-1}(x_0))$. Es claro que $\Upsilon'(t) = e^{\Upsilon(t)^4}$ y $\Upsilon(t_0) = x_0$; por lo tanto, por unicidad de la solución (Picard) tenemos que $\Upsilon : (-a + t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0), a + t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0)) \to \mathbb{R}$ es la solución a $x' = e^{x^4}$ $x(t_0) = x_0$.

   b) Llamemos ψ_ϵ a la solución de $x' = e^{x^4} + \epsilon, x(0) = 0$.
   Si $\epsilon > -1$ se puede hacer lo mismo que en (a-3). Si bien no para cualquier $\epsilon > -1$ ocurre que $e^{x^4} + \epsilon > x^2$ en todo $\mathbb{R}$, sí existe $H > 0$ tal que $e^{x^4} + \epsilon > x^2$ para todo $x > H$. Al tener $\psi_\epsilon'(t) > 1+\epsilon$ para todo t entonces en algún momento $\psi_\epsilon'(t) > H$ y, utilizando el mismo argumento que en (a-3), concluimos que ψ_ϵ está definida en un intervalo acotado.
   Cuando $\epsilon = -1$, tenemos que ψ_ϵ es la función constante 0.
   Si $\epsilon < -1$, entonces la ecuación $x' = e^{x^4} + \epsilon$ tiene a $\pm(log(\epsilon)^{1/4})$ como soluciones constantes. Debido al teorema de Picard sabemos que $|\psi_\epsilon(t)| < log(\epsilon)^{1/4}$ para todo t. Por lo tanto (usando escape de compactos) concluimos que ψ_ϵ está definida en todo $\mathbb{R}$.

2. *a*) Teórico (ver cualquier libro que hable de convergencia uniforme).

   b) Tenemos $|sen(ix)/i^2| \leq 1/i^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Por el criterio de Weierstrass, por ser $\sum 1/i^2$ convergente, se concluye que $\sum sen(ix)/i^2$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, que es lo mismo que decir que f_n converge uniformemente.

   c) Sabemos que f_n converge uniformemente. Además, el límite puntual de f_n es f. Por lo tanto, $f_n \rightrightarrows f$ en $\mathbb{R}$.

Como f_n es continua para todo n utilizando la parte (a) concluimos que f es continua.
Como $f_n \rightrightarrows f$ en $\mathbb{R}$ lo hace también en $[0, \pi]$. Por ser este último un intervalo compacto sabemos que $\int_0^\pi f_n \to \int_0^\pi f$. Calculemos entonces $\int_0^\pi f_n$:

$$\int_0^\pi f_n = \int_0^\pi \sum_{i=1}^n sen(ix)/i^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^\pi sen(ix)/i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1 - cos(i\pi)}{i^3} =$$

$$\sum_{j=1}^{[n/2]} \frac{2}{(2j-1)^3} = 2 \sum_{j=1}^{[n/2]} \frac{1}{(2j-1)^3}$$

Por lo tanto: $\int_0^\pi f = lim \int_0^\pi f_n = 2 \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(2j-1)^3}$