Facultad de Igeniería Curso 2008
IMERL
Ecuaciones Diferenciales

Soluciones del primer parcial del año 2008.

Ejercicio 1:

(a) Supongamos que tenemos una matrir real, A, de tamaño 2×2, con $\lambda = a + ib$ como valor propio. Es un resultado, del ejercicio 2 del práctico 3, que A es semejante a la matriz

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Es decir que existe una matriz invertible P tal que $A = PCP^{-1}$.

Del mismo ejercicio sabemos que:

$$e^{At} = Pe^{Ct}P^{-1} = Pe^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Consideremos los vectores $v = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$e^{At}v = e^{At}P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{at}P \begin{pmatrix} \cos(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) \end{pmatrix} = e^{at} \left(\cos(bt)v + \operatorname{sen}(bt)u\right).$$

Con el mismo argumento se muestra que:

$$e^{At}u = e^{at}(\cos(bt)u + \operatorname{sen}(bt)v).$$

(b) Supongamos que $0 \in \mathbb{R}^2$ es estable y tomemos el valor $\lambda = a + ib$ de la matriz A. Sea $u \in \mathbb{R}^2$ como en la parte (a) (observar que $u \neq 0$).

Según la definición de estabilidad (considerando $\varepsilon = 1$) existe $\delta > 0$ tal que: si $\|x_0\| < \delta$ entonces $\|e^{At}x_0\| < 1 \ \forall \ t \geqslant 0$. Tomemos $x_0 = \frac{\delta}{2\|u\|}u$, es claro que $\|x_0\| = \delta/2 < \delta$. Por lo tanto $\|e^{At}x_0\| < 1 \ \forall \ t \geqslant 0$.

Veamos el caso en que $b = 0$. Entonces, por la elección de u:

$$e^{At}x_0 = e^{At}\frac{\delta}{2\|u\|}u = \frac{\delta}{2\|u\|}e^{At}u = \frac{\delta}{2\|u\|}e^{at}u.$$

De acuerdo a lo anterior se tiene que $\left\|\frac{\delta}{2\|u\|}e^{at}u\right\| = \frac{\delta}{2}e^{at} < 1\ \forall\ t \geqslant 0$. Suponer que $a > 0$ es absurdo pues en ese caso $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\delta}{2}e^{at} = +\infty$. Entonces debe ser $a \geqslant 0$.

Si $b \neq 0$ observamos la solución con condición inicial x_0 en la sucesión de tiempos $\frac{2n\pi}{|b|}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Para todo $n \geqslant 0$ debe ser:

$$
\begin{aligned}
\|e^{A\frac{2n\pi}{|b|}}x_0\| &= \frac{\delta}{2\|u\|}e^{at}\|\cos\left(b\frac{2n\pi}{|b|}\right)u + \operatorname{sen}\left(b\frac{2n\pi}{|b|}\right)v\| \\
&= \frac{\delta}{2}e^{a\frac{2n\pi}{|b|}} < 1
\end{aligned}
$$

Si $a > 0$, tomando límite en $n \to +\infty$, se deduce que la última desigualdad no se cumple, por lo tanto es $a \leqslant 0$.

(c) Dada la matriz

$$
A = \begin{pmatrix} -21 & 9 \\ -49 & 21 \end{pmatrix}
$$

tenemos que 0 es su único valor propio. La solución de la ecuación $\dot{x} = Ax$, $x(0) = (x_0, y_0)$ es:

$$
\varphi(t, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -21x_0 + 9y_0 \\ -49x_0 + 21y_0 \end{pmatrix}
$$

Veamos que es inestable: alcanza con probar que para cualquier $\delta > 0$ existe $t > 0$ tal que $\|\varphi(t, \delta/7, 0)\| > 1$. En efecto, para un $\delta > 0$:

$$
\lim_{t\to+\infty} \|\varphi(t, \delta/7, 0)\|^2 = \lim_{t\to+\infty} \delta^2(1/7 - 3t)^2 + \delta^2 49t^2 = +\infty.
$$

Por lo tanto existe $t > 0$ tal que $\|\varphi(t, \delta/7, 0)\| > 1$.

Ejercicio 2:

(a)

$$
e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t - \cos(t) & \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}
$$

(b) La solución de la ecuación $\dot{x} = Ax$ con condición inicial (x_0, y_0, z_0) es:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t - \cos(t) & \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

(c) La solución de condición inicial $(0, 1, 0)$ es: $\varphi(t) = (0, \cos(t), -\operatorname{sen}(t))$. Esta solución está contenida en la circunferencia de centro cero y radio 1 del plano $x = 0$. El sentido de giro es horario (si el eje x es saliente en la página y los ejes cumplen la regla de la mano derecha).

Por un ejercicio del práctico sabemos que la solución anterior es estable si y sólo si $0 \in \mathbb{R}^3$ es estable. Como A tiene a 1 como valor propio, 0 es inestable y por lo tanto la solución anterior lo es.

Ejercicio 3:

(b) Ver el material teórico.

(c) Si $x = 0$ o $x = 1$ entonces $f_n(x) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. En cambio si $x \in (0, 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = (1 - x) \lim_{n\to\infty} nx^n = 0.$$

Concluimos que f_n converge puntualmente a la función nula.

Para ver que f_n no converge uniformemente basta ver que $\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \neq 0$.

Buscamos el máximo de f_n en $[0, 1]$. Estudiando el signo de la derivada se deduce que el máximo de f_n en $[0, 1]$ es $f_n(1 - 1/n)$. Luego:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} f_n(1 - 1/n) = \lim_{n\to+\infty} (1 - 1/n)^n = e^{-1}.$$

Hemos probado que f_n converge puntualmente pero no uniformemente.

(c) Primero observemos que la sucesión de funciones h_n converge puntualmente a cero. Esto es inmediato pues f_n converge puntualmente a cero.

Ahora veamos que la sucesión h_n converge uniformemente a cero. Para ello probaremos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces:

$$\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| < \varepsilon.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por lo visto en la parte (b) sabemos que la sucesión $\left\{ \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \right\}$ es convergente. Por lo tanto existe $H > 0$ tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| < H \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como g es continua, y $g(0) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $1 - \delta \leqslant x \leqslant 1$, entonces $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2H}$. Veamos que $\sup_{x\in[1-\delta,1]} |h_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $1-\delta \leqslant x \leqslant 1$, $|h_n(x)| = |f_n(x)||g(x)| < H|g(x)| < H\frac{\varepsilon}{2H} = \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando el supremo tenemos lo que queríamos.

Por otro lado, veamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $\sup_{x\in[0,1-\delta]} |h_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tomemos n_1 tal que si $n \geqslant n_1$, entonces $1 - \delta < 1 - 1/n$. Para n como antes tenemos que f_n es creciente y positiva en $[0, 1-\delta]$, por lo tanto el máximo de f_n en $[0, 1-\delta]$ es $f_n(1-\delta)$.

Sabemos que $|g|$ es continua en $[0, 1]$ y por lo tanto tiene máximo, que llamaremos R. Tomemos $x \in [0, 1-\delta]$, entonces $|h_n(x)| = f_n(x)|g(x)| \leqslant f_n(1-\delta)R$. Luego

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1-\delta]} |h_n(x)| \leqslant \lim_{n\to+\infty} f_n(1-\delta)R = 0.$$

Elegimos $n_0 > n_1$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $\sup_{x\in[0,1-\delta]} |h_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Con todo lo anterior tenemos que: si $n \geqslant n_0$ entonces:

$$\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| = \sup_{x\in[0,1-\delta]} |h_n(x)| + \sup_{x\in[1-\delta,1]} |h_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado que h_n converge uniformemente a la función nula.