Universidad de la República — **Ecuaciones Diferenciales**

Facultad de Ingeniería - IMERL — **Noviembre 2020**

SEGUNDO PARCIAL – Lunes 30 de Noviembre de 2020

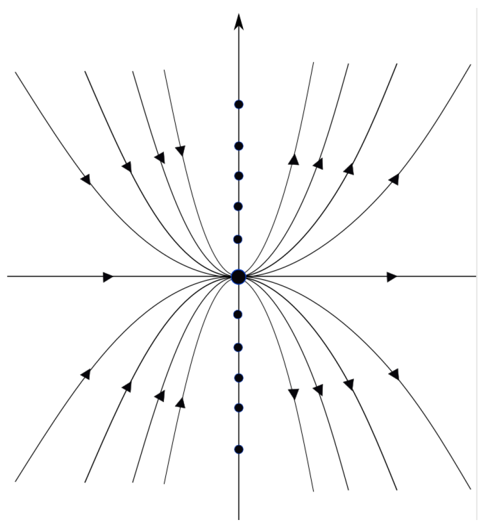
Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

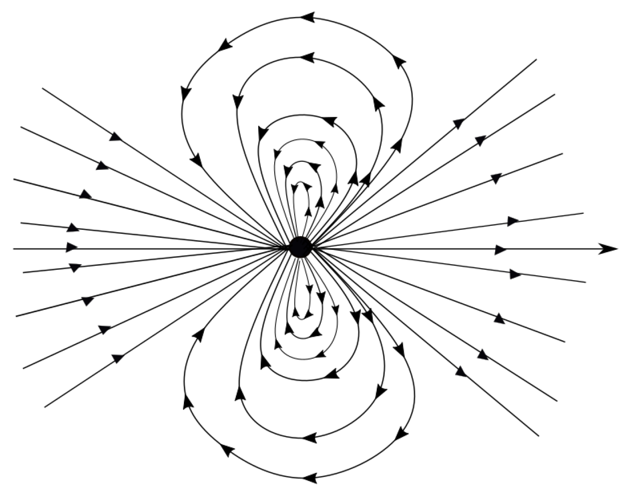
Ejercicio 1.(20 pts.) Se considera la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2yx \end{cases}$$

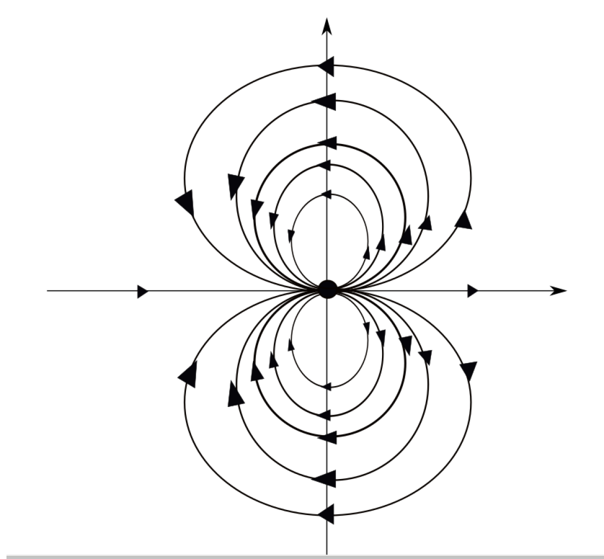
(1) Indicar cuál de los siguientes se corresponde con el diagrama de fase de la ecuación. Justifique su respuesta.



(A)



(B)



(C)

SOLUCIÓN: El diagrama de fase correcto es la opción (C). Podemos descartar (A) ya que el único punto de equilibrio de la ecuación es el origen, y (B) ya que ninguna trayectoria puede estar contenida en una recta, como se deduce de derivar la trayectoria $(x(t), mx(t))$.

(2) Estudiar intervalo maximal de las soluciones.

SOLUCIÓN: Los gráficos de las soluciones son subconjuntos de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ espacialmente acotadas (tanto para el futuro como para el pasado) salvo los que corresponden a condiciones iniciales $(0, x_0, y_0)$ de la forma $(0, x_0, 0), x_0 \neq 0$. Dado que la ecuación verifica las hipótesis del teorema de Picard en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, podemos aplicar el teorema de escape de compactos para asegurar que el gráfico de las soluciones escapa de cualquier compacto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ lo que implica (para las soluciones espacialmente acotadas) que el intervalo maximal es $\mathbb{R}$. Si observamos la ecuación en los puntos de la forma $(x, 0)$ obtenemos $\dot{x} = x^2$. Estudiando dicha ecuación sabemos que las soluciones con condición inicial $(x_0, 0)$ con $x_0 < 0$ tienen intervalo maximal $(1/x_0, +\infty)$ y si $x_0 > 0$ tienen intervalo maximal $(-\infty, 1/x_0)$.

(3) Linealizar el sistema en el punto de equilibrio. ¿Qué información sobre la estabilidad del punto de equilibrio podemos obtener a partir de la linealización?

SOLUCIÓN: $D_{(0,0)}f$, donde $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$ es la matriz nula, por lo cual no podemos obtener información acerca de la estabilidad del punto de equilibrio a partir de la linealización.

(4) ¿Existe una función de Lyapunov en el origen? Justifique su respuesta.

SOLUCIÓN: El origen es un punto de equilibrio inestable, como se deduce observando las trayectorias con condiciones iniciales de la forma $(0, x_0, 0), x_0 > 0$. Esto impide la existencia de una función de Lyapunov en el origen.

Ejercicio 2.(20 pts.) Se considera la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in I\!N, n \geq 2$, dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, \quad x \in [0, 1/n] \\ 2n - n^2x, \ x \in [1/n, 2/n] \\ 0, \ x \in [2/n, 1] \end{cases}$$

Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando su respuesta:

(1) La sucesión $(f_n)_{n\geq 2}$ converge puntualmente a la función constante igual a 0.

(2) La sucesión $(f_n)_{n\geq 2}$ converge uniformemente a la función constante igual a 0.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$

(4) Existe $K > 0$ tal que $f_n(x) < K$ para todo $x \in [0,1]$ y para todo $n \geq 2$.

SOLUCIÓN: (1) **VERDADERO**
Buscamos probar que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.
Por un lado, si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 0 \quad \forall \quad n$.

Por otro lado, si $x \in (0,1]$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{2}{n} < x \quad \forall n > n_0$. De donde,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

(2) **FALSO**
Para evaluar la convergencia uniforme podemos estudiar la siguiente expresión:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \|f_n(x) - f(x)\|$$

En este caso, queremos evaluar la convergencia uniforme a la función f(x) = 0.

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \|f_n(x)\|$$

Para $x \in [0, \frac{1}{n}]$ la función es monótona creciente y para $x \in [\frac{1}{n}, 1]$, f_n es decreciente. De donde, el supremo (en este caso un máximo), se da en $x = \frac{1}{n}$.

$$\sup_{x\in[0,1]} \|f_n(x)\| = f_n(1/n) = n$$

Es decir,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \|f_n(x) - f(x)\| \quad \text{no} \quad \text{es} \quad \text{finito}$$

La sucesión de funciones f_n no converge uniformemente a la función nula.

(3) **FALSO**
Por un lado,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\frac{n}{2} = 1$$

Por otro lado,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$$

(4) **FALSO**
Sea $K > 0, \quad K \in \mathbf{R}$. Probaremos que existen n_0 y x_0 tal que $f_{n_0}(x_0) > K$. Sea n_0 el entero más cercano superior a K. Sea $x_0 = \frac{1}{n_0}$. Se tiene:

$$f_{n_0}(x_0) = f_{n_0}(\frac{1}{n_0}) = n_0 \geq K$$

De donde, no existe $K > 0$ tal que $f_n(x) < K$ para todo $x \in [0,1]$ y para todo $n \in I\!N$.

Ejercicio 3.(10 pts.) Demostrar la validez de la igualdad:

$$\cos(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin(2nx)}{4n^2-1}, x \in (0,\pi).$$

Sugerencia: Puede ser de utilidad la fórmula $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

SOLUCIÓN: Como se quiere escribir la funcion $\cos(x)$ como suma de senos, lo primero que debemos hacer la extensión impar de la función $\cos(x)$ definida en $[0,\pi]$ al intervalo $[-\pi,\pi]$ y luego la extensión a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera 2π-periódica.
Debemos calcular $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx$.

Como estamos tomando la extensión impar y $\sin(x)$ también es impar, resulta que la función $f(x)sen(kx)$ es par, por lo que

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos(x)sen(kx)dx.$$

De acuerdo con la sugererencia propuesta en el ejercicio sabemos que

$$cos(x)sen(kx) = \frac{sen((k+1)x) + sen((k-1)x)}{2}.$$

Por lo tanto

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cos(x)sen(kx)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} sen((k+1)x) + sen((k-1)x)dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi}(\frac{cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{cos((k-1)x)}{k-1})|_0^{\pi}.$$

En el caso en que k sea impar $cos((k+1)\pi) = cos(0)$ y $cos((k-1)\pi) = cos(0)$, por lo que $\frac{cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{cos((k-1)x)}{k-1})|_0^{\pi} = 0$.

En el caso que k sea par $\frac{cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{cos((k-1)x)}{k-1})|_0^{\pi} = \frac{-1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - (\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1}) = \frac{-4k}{k^2-1}$.

Por lo tanto $b_k = 0$ si k es impar, y $b_k = \frac{4k}{\pi(k^2-1)}$.

De esto se verifica que la serie de Fourier de f es:

$$S(f) = \sum_{kpar} \frac{4k}{\pi(k^2-1)}sen(kx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi((2n)^2-1)}sen(2nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}sen(2nx).$$

Utilizando el Teorema de Dini, que establece que en los puntos de continuidad de f la serie de Fourier converge puntualmente a f, se deduce que para $x \in (0,\pi)$, $cos(x) = S(f)$, lo cual demuestra la validez de la igualdad planteada.

Ejercicio 4.(10 pts.) Hallar U de clase C^2 en $(0,+\infty)\times(0,\pi)$ y continua en $[0,+\infty)\times[0,\pi]$ tal que:

$$\begin{cases} U_t = U_{xx}, (t,x) \in (0,+\infty)\times(0,\pi) \\ U(0,x) = 3\sin(4x),\ x \in [0,\pi] \\ U(t,0) = U(t,\pi) = 0,\ t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

Verificar que la función U hallada es solución del problema.

SOLUCIÓN: Por separación de variables sabemos que cualquier función de la forma $U(t,x) = Ce^{-k^2t}\sin(kx)$ con $C \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ verifica $U_t = U_{xx}$ y $U(t,0) = U(t,\pi) = 0$. Entonces basta tomar $C = 3$ y $k = 4$ para que se verifique también que $U(0,x) = 3\sin(4x)$.

Verifiquemos que $U(t,x) = 3e^{-16t}\sin(4x)$ es la solución al problema. Es claro que U es $\mathcal{C}^2$ en $(0,+\infty)\times(0,\pi)$ y continua en $[0,+\infty)\times[0,\pi]$ por ser producto de funciones que lo son. Además, es inmediato verificar que $U(t,0) = U(t,\pi) = 0$ (puesto que el seno se anula en esos valores de x) y que $U(0,x) = 3\sin(4x)$ (ya que la exponencial vale 1 en $t = 0$). Calculemos las derivadas parciales:

- $U_t(t,x) = -16\left(3e^{-16t}\sin(4x)\right)$

- $U_x(t,x) = 3e^{-16t} 4\cos(4x) \Rightarrow U_{xx}(t,x) = -16\left(3e^{-16t}\sin(4x)\right)$

por lo que efectivamente $U_t = U_{xx}$.