Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

SEGUNDO PARCIAL - 16 DE NOVIEMBRE DE 2019. DURACIÓN: 3:30

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE		
Ej 1	Ej 2	**Total**

Ejercicio 1. (34 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función impar, periódica de período 2π y tal que $f(x) = x(\pi - x)$ para todo $x \in [0, \pi]$.

1. Hallar su serie de Fourier. (8 puntos)
2. Buscando soluciones de la forma $u(t, x) = T(t)X(x)$, hallar una función $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua y de clase C^2 en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$ que sea candidata a solución de la ecuación de ondas:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi) \\ u(0,x) = 0 & x \in [0,\pi] \\ u_t(0,x) = x(\pi - x) & x \in [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in [0,+\infty) \end{cases} \qquad \text{(13 puntos)}$$
3. Si $u(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x)$ es la candidata hallada en la parte anterior, probar que:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial x} \cdot \quad \text{(13 puntos)}$$
Enunciar (NO demostrar) los resultados que se utilizan.

Ejercicio 2. (26 puntos)

1. Enunciar y demostrar el primer teorema de Liapunov. (14 puntos)
2. Se considera el sistema definido por:
$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = -2e^x + 2 - y. \end{cases}$$
   a) Usando una función de la forma $V(x,y) = a(e^x - x - 1) + by^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$, probar que $(0,0)$ es estable. (6 puntos)
   b) Probar que $(0,0)$ es además asintóticamente estable. (6 puntos)
   Enunciar (NO demostrar) los resultados que se utilizan.

Se recuerda que:

- $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(kx)\, dx = \frac{\operatorname{sen}(kx) - kx\cos(kx)}{k^2}$
- $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(kx)\, dx = \frac{(2 - k^2x^2)\cos(kx) + 2kx\operatorname{sen}(kx)}{k^3}$