
Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia // Facultad de Ingeniería // Universidad de la República

Ecuaciones Diferenciales
Segundo parcial con soluciones

17 de noviembre de 2018.

Ejercicio 1 (20 puntos)

(1) **Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(s) = s^2(\text{sen}(\frac{1}{s}) - 1)$ si $s \neq 0$ y $f(0) = 0$. Graficarla para $s \in [0, +\infty)$. Calcular $f'(0)$.**

f es diferenciable en $\mathbb{R} - \{0\}$, y como $\lim_{s \to 0} f(s) = 0$, f es continua en 0.

$f(s) = 0 \iff s = 0$ o $\text{sen}(\frac{1}{s}) = 1 \iff s = 0$ o $\frac{1}{s} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z} \iff s = 0$ o $s = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

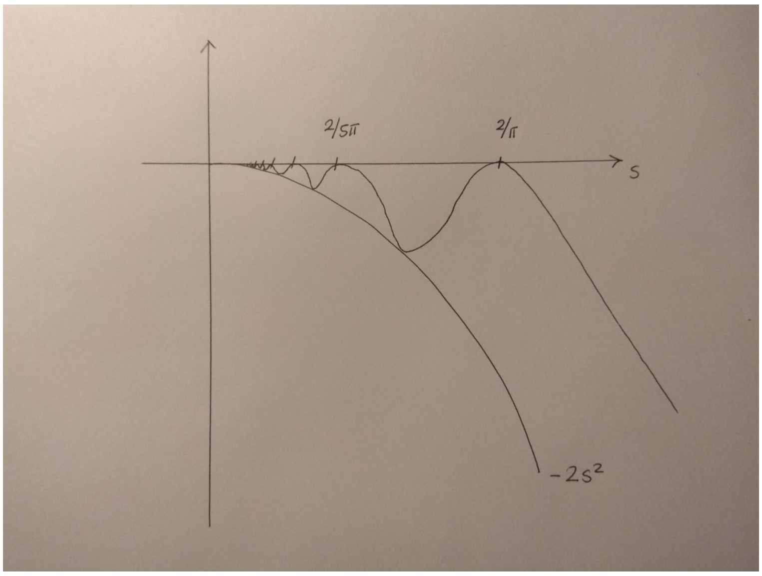
Cuando $k \in \mathbb{Z}^+$, esto nos da una sucesión de ceros de la función f en $(0, +\infty)$ que acumulan en 0.

Por otro lado,

$$-2s^2 \leq f(s) \leq 0.$$

La igualdad $-2s^2 = f(s)$ se produce cuando $s = 0$ o cuando $s = \frac{2}{(4k-1)\pi}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Finalmente observemos que $\lim_{s \to +\infty} f(s) = -\infty$. Estos datos nos permiten hacer el siguiente esbozo del gráfico de f:



Para calcular $f'(0)$ tomamos límite del cociente incremental de f en 0, y obtenemos

$$f'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s \to 0} s(\text{sen}(\frac{1}{s}) - 1) = 0.$$

(2) **Consideremos la ecuación diferencial**

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + f(x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= x + f(x^2 + y^2)y. \end{cases}$$

Linealizar la ecuación alrededor del punto de equilibrio $(0, 0)$. Verificar que no puede usarse el teorema de Hartman para probar que $(0, 0)$ es estable, justificando su respuesta.

La ecuación es $\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde $F(x, y) = (-y, x) + G(x, y)$, con $G(x, y) = (f(x^2 + y^2)x, f(x^2 + y^2)y)$. Como $F - G$ es lineal, calcularemos $D_{(0,0)}G$. Como G es composición de funciones diferenciables, aplicamos la regla de la cadena y obtenemos

$$D_{(0,0)}G = \begin{pmatrix} f'(0)\alpha + f(0) & f'(0)\beta \\ f'(0)\gamma & f'(0)\delta + f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí α, β, γ y δ son números que no nos molestamos en calcular porque de todos modos aparecían multiplicados por cero. (Por ejemplo, α es el resultado de evaluar $2x^2$ en 0, que también es 0).

El cálculo anterior nos dice que la parte lineal de la ecuación que nos interesa es

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -y \\ \dot{y} & = & x \end{array} \right. ,$$

y que la matriz jacobiana de F es

$$D_{(0,0)}F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios tienen parte real cero. Por lo tanto, el teorema de Hartman no nos sirve para clasificar el punto de equilibrio $(0,0)$.

(3) **Probar que el punto de equilibrio $(0,0)$ es estable.**

Consideremos la función $V(x,y) = x^2 + y^2$. Entonces

$$\dot{V}(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-y + f(x^2+y^2)x) + 2y(x + f(x^2+y^2)y) = 2(x^2+y^2)f(x^2+y^2) \leq 0.$$

Por el primer teorema de Lyapunov, $(0,0)$ es estable.

(4) **Probar que el punto de equilibrio $(0,0)$ no es asintóticamente estable.**

Para $k \in \mathbb{Z}^+$, observemos que cuando $x^2 + y^2 = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ la componente radial del campo F se anula, y la curva $t \mapsto (\frac{2}{(4k+1)\pi})^{\frac{1}{2}}(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ es solución de la ecuación. Esta curva es una circunferencia de radio $(\frac{2}{(4k+1)\pi})^{\frac{1}{2}}$, por lo que claramente no tiende a cero cuando $t \to +\infty$. Al crecer k, el radio de estas circunferencias tiende a cero. Esto nos muestra que arbitrariamente cerca de 0 hay una solución periódica de la ecuación diferencial, por lo que $(0,0)$ no es asintóticamente estable.

Ejercicio 2 (20 puntos)

(1) **Recordemos que la ecuación del calor es $u_t = u_{xx}$. Hallar sus soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ justificando el procedimiento empleado.**

Ver libro de Omar Gil, página 305.

(2) **Hallar la serie de Fourier de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 1 que para $x \in [-1/2, 1/2]$ vale $|x|$.**

Como la función es par, su serie de Fourier será de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi x).$$

Un cálculo directo de los coeficientes muestra que

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}(\cos(k\pi) - 1) = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}$$

(3) **Hallar una solución formal (es decir, una serie "candidata a solución") del problema**

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & \textbf{para } (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \textbf{para } x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \textbf{para } t \in [0,+\infty) \end{array} \right.$$

(Aquí f es la misma función que aparece en el inciso anterior).

Como la función f es una función periódica de período 1 se ve que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1-x & \text{para } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ahora se puede aplicar lo demostrado en la parte (1)

$$u_\lambda(x,t) = (C_\lambda \cos\sqrt{|\lambda|}x + S_\lambda \sin\sqrt{|\lambda|}x)e^{-|\lambda|t}.$$

Al usar las condiciones de frontera se ve que $C_\lambda = 0$ y por otra parte

$$0 = S_\lambda \sin\sqrt{|\lambda|}\, e^{-|\lambda|t},$$

esta relación implica que $\sqrt{|\lambda|} = n\pi$ para $n \geq 1$. Luego se obtiene

$$u_n(x,t) = S_n e^{-\pi^2 n^2\, t} \sin \pi n x.$$

Es decir debe postularse una solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n e^{-\pi^2 n^2\, t} \sin \pi n x.$$

Para encontrar los coeficientes se usa la condición inicial

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin \pi n x \Rightarrow \int_0^1 f(x) \sin \pi m x\, dx = S_m \int_0^1 (\sin \pi m x)^2\, dx = S_m \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi m x}{2} dx = \frac{1}{2} S_m.$$

Este resultado nos conduce a

$$S_m = 2\int_0^1 f(x) \sin \pi m x\, dx = 2[\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin \pi m x\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin \pi m x\, dx].$$

Pero

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin \pi m x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin \pi m (1-x)\, dx = (-1)^{m+1} \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin \pi m x\, dx,$$

y entonces

$$S_m = 2[(1 + (-1)^{m+1}) \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin \pi m x\, dx],$$

Esto implica que $S_{2k} = 0$ y como

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin \pi m x\, dx = -x \frac{\cos \pi m x}{\pi m}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi m} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi m x\, dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\pi m}{2}}{\pi m} + \frac{1}{(\pi m)^2} \sin \frac{\pi m}{2},$$

para $m = 2k+1$, $k \geq 0$ obtenemos

$$m = 2k+1 \Rightarrow I = \frac{(-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2}, \text{ y } S_{2k+1} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2}.$$

De esta manera la candidata a solución queda expresada

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-\pi^2 (2k+1)^2\, t} \sin \pi (2k+1) x.$$

(4) **Probar que la solución formal obtenida en el inciso anterior converge a una solución del problema en $(0,1) \times (0,+\infty)$. Es suficiente justificar la convergencia de la serie correspondiente a u_t; no se pide que escriba la justificación para u_{xx}. (Sugerencia: Probar que para todo $\delta > 0$ la serie converge a una solución en $(0,1) \times (\delta,+\infty)$. ¿Por qué es esto suficiente?)**

Sabemos que cada término de la serie verifica la ecuación. Así que para ver que la serie completa también la verifica basta demostrar que podemos derivar término a término. Lo haremos sólo para la derivada con respecto a t. Podemos calcular la derivada temporal de la función $u_{2k+1}(x,t)$.

$$\partial_t u_{2k+1} = S_{2k+1} e^{-\pi^2(2k+1)^2\,t}(-\pi^2(2k+1)^2)\sin \pi(2k+1)x = -4(-1)^k e^{-\pi^2(2k+1)^2\,t} \sin \pi(2k+1)x.$$

Entonces

$$|\partial_t u_{2k+1}| \leq 4e^{-\pi^2(2k+1)^2\,t} \leq 4e^{-\pi^2(2k+1)^2\,\delta}, \text{ si } t > \delta.$$

Y la serie $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi^2(2k+1)^2\delta}$ es convergente. El criterio de Weierstrass implica que la serie

$$-4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\pi^2(2k+1)^2\,t} \sin \pi(2k+1)x$$

converge uniformemente a la derivada de la serie de $u(x,t)$ con respecto al tiempo de u. Por una consideración similar se tiene que la serie

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-\pi^2(2k+1)^2\,t} \sin \pi(2k+1)x,$$

converge uniformemente a una función continua y con derivada con respecto al tiempo y derivada segunda con respecto a x, y satisface la ecuación en $(\delta,+\infty) \times (0,1)$, para todo $\delta > 0$.

Escoger uno y sólo uno de los siguientes dos ejercicios:

Ejercicio 3 (20 puntos)
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$, decimos que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotemos por

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} f(x)dx$$

a su transformada de Fourier. Recordemos las siguientes propiedades de la transformada de Fourier, que se podrán usar en este ejercicio:

- **Para $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,**
$$\hat{f} = \hat{g} \Longrightarrow f = g.$$
- **La convolución de f y g se define como**
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)dz.$$
Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Obsevemos que como $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

(1) **Integrando por partes muestre que si $f' \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f'}(\gamma) = i\gamma\hat{f}(\gamma)$. Deduzca a su vez que si $f'' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f''}(\gamma) = -\gamma^2\hat{f}(\gamma)$.**

Aplicando la definición de la transformada e integración por partes obtenemos:

$$\widehat{f'}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} f'(x)dx = e^{-i\gamma x} f(x)|_{-\infty}^{+\infty} + i\gamma\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\gamma x}dx = i\gamma\hat{f}(\gamma)$$

ya que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Por el otro lado,

$$\widehat{f''}(\gamma) = \widehat{(f')'}(\gamma) \stackrel{*}{=} i\gamma\widehat{f'}(\gamma) \stackrel{*}{=} (i\gamma)^2\hat{f}(\gamma) = -\gamma^2\hat{f}(\gamma)$$

donde en lugares * aplicamos la propiedad que probamos arriba.

(2) **Supongamos que y, y' y f pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$. Tome transformada de Fourier en la siguiente ecuación diferencial lineal**

$$y''(x) - y(x) = -f(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

y calcule $\hat{y}(\gamma)$ en función de $\hat{f}(\gamma)$.

Dicha ecuación diferencial nos dice que tenemos la igualdad de funciones: $y'' - y = -f$. Aplicando transformada de Fourier a ambas funciones obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x}\big(y''(x) - y(x)\big)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} y''(x)dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} y(x)dx$$

$$= \widehat{y''}(\gamma) - \hat{y}(\gamma) \stackrel{*}{=} -\gamma^2\hat{y}(\gamma) - \hat{y}(\gamma) = -(1+\gamma^2)\hat{y}(\gamma) = -\hat{f}(\gamma)$$

donde en * aplicamos la segunda propiedad probada arriba. De aquí se sigue que

$$\hat{y}(\gamma) = \frac{\hat{f}(\gamma)}{1+\gamma^2}. \tag{2}$$

(3) **Sea $e(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$; entonces sabemos que $\hat{e}(\gamma) = \frac{1}{1+\gamma^2}$. Demostrar que la solución de (1) es**

$$y(x) = e * f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{|x-z|} f(z)dz.$$

En la parte anterior probamos que si $y(x)$ es la solución de (1), entonces su transformada cumple (2). Por la propiedad de la transformada $\hat{f} = \hat{g} \Longrightarrow f = g$ dada en la letra tenemos que si probamos que la transformada de $e * f$ es igual al lado derecho en (2), entonces $e * f = y$ y así $e * f$ es solución a (1). Por la otra propiedad $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ dada en la letra tenemos:

$$\widehat{(e * f)}(\gamma) = \hat{e}(\gamma)\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{1+\gamma^2}\hat{f}(\gamma)$$

con lo cual tenemos lo que queríamos.

Ejercicio 4 (20 puntos)
Recordemos que, para $X, Y \in \mathbb{R}^N$, la desigualdad de Schwarz dice que

$$|\langle X, Y\rangle| \leq ||X||\,||Y||.$$

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales tal $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 < \infty$.

(1) **Demuestre usando la desigualdad de Schwarz que**

$$\sum_{i=1}^{N} |a_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} n^2|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Deduzca que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Con el producto escalar estandar en $\mathbb{R}^N$, tomando $X = (x_1, ..., x_N), Y = (y_1, ..., y_N)$ de términos generales $x_n = na_n$ y $y_n = 1/n$ para todos $n = 1, .., N$ obtenemos $\langle X, Y\rangle$ es igual al lado derecho en la desigualdad arriba, y que $||X|| = \left(\sum_{n=1}^{N} n^2|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y $||Y|| = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Entonces la desigualdad de Schwarz aplicada a X e Y es exactamente la desigualdad que se pedía demostrar.

Cuando $N \to \infty$ tenemos que las series $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergen (primera por letra, la segunda sabemos que es convergente). Entonces cuando $N \to \infty$ en el lado derecho de la desigualdad probada tenemos una serie convergente, luego por el criterio de Weierstrass converge la serie de término general $|a_n|$.

(2) Definamos la función $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(2\pi nx)$. Demuestre, usando el criterio de Weierstrass, que esta serie es uniformemente convergente.

Dado que $|a_n \operatorname{sen}(2\pi nx)| \leq |a_n|$ y por la parte anterior $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces por el criterio de Weierstrass para series de funciones (este resultado fue probado en el teórico) converge uniformemente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(2\pi nx) = g(x)$.

(3) **Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} n^4|a_n|^2 < \infty$, entonces la serie formal de derivadas $h(x) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos(2\pi nx)$ converge uniformemente ¿A qué función?**

Tomando $b_n = na_n$ en la desigualdad en la parte 1 obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} |na_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} n^4|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces por el criterio de Weierstrass converge la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |na_n|$. Ahora con el mismo argumento como en la parte 2 converge uniformemente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos(2\pi nx)$ y luego $h(x)$. Formalmente tenemos que $g'(x) = h(x)$. Dado que ambas series (la que define a $g(x)$ y la que define a $h(x)$) convergen uniformemente, podemos asegurar que efectivamente $g'(x) = h(x)$, con lo cual $h(x)$ converge a la derivada de $g(x)$.