Universidad de la República **Ecuaciones diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2017**

SEGUNDO PARCIAL – Sábado 18 de noviembre de 2017

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.

a) Usar la función de Liapunov $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ para analizar la estabilidad del origen:

$$\begin{aligned} x' &= -y - xy^2 + z^2 - x^3 \\ y' &= x + z^3 - y^3 \\ z' &= -xz - zx^2 - yz^2 - z^5 \end{aligned}$$

Estudiar la estabilidad de la parte lineal en el origen.

b) Hallar el diagrama de fase alrededor del origen de la ecuación:

$$\begin{aligned} x' &= -\sin(x) + y \\ y' &= y + x^2 \end{aligned}$$

Justificar y estudiar la estabilidad en el origen.

Solución:

a) La función $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ porque es un polinomio, $V(x,y,z) > 0$ para todo $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ y $V(0,0,0) = 0$. Entonces $(0,0,0)$ es un mínimo absoluto de V en $\mathbb{R}^2$. Calculemos $\dot{V}(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y,z) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \\ &= 2x(-y - xy^2 + z^2 - x^3) + 2y(+z^3 - y^3) + 2z(-xz - zx^2 - yz^2 - z^5) \\ &= -2x^2y^2 - 2x^4 - 2y^4 - 2z^2x^2 - 2z^6. \end{aligned}$$

Observamos que $\dot{V}(x,y,z) < 0$ para todo $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ y que $\dot{V}(0,0,0) = 0$. Entonces la función V es una función de Lyapunov estricta lo cual implica que el punto crítico $(0,0,0)$ es asintóticamente estable.

Sea $F(x,y,z) = (y - xy^2 + z^2 - x^3, x + z^3 - y^3, -xz - zx^2 - yz^2 - z^5)$, consideremos la matriz Jacobiana de F en $(0,0,0)$

$$D_{(0,0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La parte lineal del sistema tiene asociada la siguiente matriz:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \ ; \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

y solución general:

$$\begin{aligned} x(t) = & \quad x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y(t) = & \quad -x_0 \sin t + y_0 \cos t \\ z(t) = & \quad z_0. \end{aligned}$$

Se cumple:

$$\| (x(t), y(t), z(t)) \| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \| (x_0, y_0, z_0) \| .$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon$ y supongamos que $\| (x_0, y_0, z_0) \| < \delta$ entonces usando la igualdad anterior se tiene:

$$\| (x_0, y_0, z_0) \| < \delta \Rightarrow \| (x(t), y(t), z(t)) \| < \delta = \varepsilon.$$

Probamos usando la definición que el origen es estable.

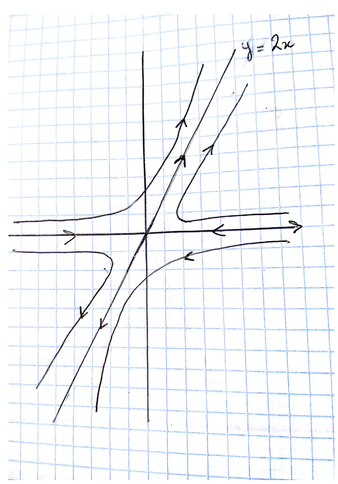
La misma igualdad implica que $(x(t), y(t), z(t))$ no converge a $(0, 0, 0)$ cuando $t \to +\infty$ pues la trayectoria permanece a una distancia constante del origen para todo t. Demostramos que el origen es un punto de equilibro estable pero no asintóticamente estable.

b) En este caso comenzamos estudiando la parte lineal del sistema que corresponde a estudiar el sistema lineal asociado a la matriz:

$$D_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son 1 y -1 y los subespacios propios asociados son $y = 2x$ $y = 0$ respectivamente. Como los valores propios tiene parte real diferente de cero el Teorema de Hartman-Grobman implica que las soluciones del sistema son localmente conjugadas alrededor del origen a las soluciones del sistema lineal.

Una consecuencia de este hecho es que para representar el diagrama de fase del sistema podemos utilizar el diagrama de fases del linealizado.



Otra consecuencia de dicho resultado es la inestabilidad del origen puesto que el origen es inestable para el sistema linealizado.

Ejercicio 2.

a) Se considera una función f continua $2\pi-$ periódica tal que su serie de Fourier converge puntualmente a f en $[0,2\pi]$. Probar que si los coeficientes de Fourier de f (en $[0,2\pi]$) verifican $|a_k(f)|+|b_k(f)| \leq 1/k^3$ para todo $k \geq 1$, entonces f es de clase C^1.

b) Sea $F(x)$ la extensión $2\pi-$ periódica de la extensión par de la función identidad definida en $[0,\pi]$. Probar que existe $k \geq 1$ tal que $|a_k(F)|+|b_k(F)| > 1/k^3$.

Solución:

a) Llamemos S_f a la serie de Fourier de f, es decir:

$$S_f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$$

donde:

$$g_k(x) = a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx).$$

La derivada de cada g_k es:

$$g_k'(x) = -a_k(f)k\sin(kx) + b_k(f)k\cos(kx)$$

y como

$$|-a_k(f)k\sin(kx) + b_k(f)k\cos(kx)| \leq k\left(|a_k(f)|+|b_k(f)|\right) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por el criterio de la mayorante de Weierstrass concluimos que $\sum g_k'(x)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Como además $\sum g_k(x)$ converge puntualmente a f, concluimos que $\sum g_k(x)$ converge uniformemente a una función derivable, cuya derivada es el límite uniforme de la serie de las g_k'. Además, el límite uniforme de $\sum g_k'(x)$ debe ser continuo, ya que es el límite uniforme de una serie de funciones continuas. En conclusión, hemos probado que S_f converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función de clase C^1.

(1) Como F no es C^1 (ya que no es derivable por ejemplo en $x=0$), no puede verificar las hipótesis de la parte anterior. Así, debe existir un $k \geq 1$ tal que $|a_k(F)|+|b_k(F)| > 1/k^3$.

Ejercicio 3. Demostrar el Teorema de Lyapunov 1.

Solución: Ver teórico.

Ejercicio 4. Buscar soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \sin(\frac{4\pi x}{L})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

y las condiciones de borde

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Solución:

Por el método de propagación:

Buscamos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f y g C^2 de forma que $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$.

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) = a^2[f''(x+at) + g''(x-at)] \\ u_{xx}(x,t) = f''(x+at) + g''(x-at) \end{gathered}$$

Por lo que verifica la ecuación diferencial para cualquiera sean f y g.

$$\left.\begin{array}{r} u_t(x,0) = a[f'(x) - g'(x)] = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) + K \\ u(x,0) = f(x) + g(x) = sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 2g(x) + K = sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) - K}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + K}{2}$$

Es claro que f y g son funciones C^2.

Por lo tanto:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[sin\left(\frac{4\pi}{L}(x+at)\right) + sin\left(\frac{4\pi}{L}(x-at)\right)\right] \tag{1}$$

Además:

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left[sin\left(\frac{4\pi}{L}at\right) + sin\left(-\frac{4\pi}{L}at\right)\right] = 0$$

$$u(L,t) = \frac{1}{2}\left[sin\left(\frac{4\pi}{L}(L+at)\right) + sin\left(\frac{4\pi}{L}(L-at)\right)\right] = 0$$

Por lo que $u(x,t)$ de la ecuación 1 es solución.

Por el método de separación de variables:

Buscamos una solución de la forma $u(x,t) = A(x).B(t)$ con A y B no nulas. La condición $u_{tt} = a^2.u_{xx}$ es equivalente a que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ /

$$\begin{gathered} A''(x) - \frac{\lambda}{a^2}.A(x) = 0 \\ B''(t) - \lambda.B(t) = 0 \end{gathered}$$

La condición $u(x,0) = sin\left(\frac{4\pi}{L}.x\right)$ implica que $A(x) = \frac{1}{B(0)}.sin\left(\frac{4\pi}{L}.x\right)$
De la primera ecuación obtenemos $\frac{1}{B(0)}.sin\left(\frac{4\pi}{L}.x\right).\left(\frac{-16\pi^2}{L^2} - \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0 \ \forall x$ de lo que calculamos $\lambda = \frac{-16\pi^2.a^2}{L^2}$
Esto implica que $\exists\ c, c' \in \mathbb{R}/B(t) = c.sin\left(\frac{4\pi.a}{L}.t\right) + c'.cos\left(\frac{4\pi.a}{L}.t\right)$, que al combinarlo con la condición $u_t(x,0) = 0$ que es equivalente a $B'(0) = 0$ da $c = 0$.
Del mismo modo, $\exists\ k, k' \in \mathbb{R}/A(x) = k.sin\left(\frac{4\pi}{L}.x\right) + k'.cos\left(\frac{4\pi}{L}.x\right)$, que al combinarlo con la condición $u(0,t) = 0$ equivalente a $A(0) = 0$ da $k' = 0$.
Tenemos entonces la solución parcial $u(x,t) = c'.k.sin\left(\frac{4\pi}{L}.x\right).cos\left(\frac{4\pi.a}{L}.t\right)$ para la cual $u(L,t) = 0$

siempre. Utilizando nuevamente el perfil de temperatura inicial $u(x,0)$ deducimos $c'.k = 1$ por lo que la solución queda

$$u(x,t) = sin\left(\frac{4\pi}{L}.x\right).cos\left(\frac{4\pi.a}{L}.t\right)$$

Es inmediato verificar que coincide con la solución calculada por el método de propagación utilizando la fórmula $sin(x+y) = sin(x).cos(y) + sin(y).cos(x)$ y observando que la función *seno* es impar y 2π periódica.