Ecuaciones Diferenciales
Segundo parcial

19 de noviembre de 2016.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. (20 puntos)
   a) Demostrar que, dado $\lambda > 0$, la ecuación
   $$\lambda x + e^x = 0$$
   tiene una única raíz real a la que denotaremos por x_λ. (5 puntos)
   b) Probar que la función
   $$V(x,y) = \frac{\lambda}{2}x^2 + e^x + \frac{1}{2}y^2$$
   alcanza su mínimo absoluto en el punto $\big(x_\lambda, 0\big)$.(5 puntos)
   c) Probar que el punto de equilibrio de la ecuación diferencial
   $$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\lambda x - e^x. \end{cases}$$
   es estable pero no asintóticamente estable. (10 puntos)

2. (24 puntos)
   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, $f(x+2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, f par y tal que
   $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx) = \frac{e^{-n^2}}{n^2+1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Buscar un candidato a solución de la forma $u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,t)$ para la siguiente ecuación:
   $$(*)\begin{cases} (1)\ u_t + u_{xx} = 0 \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi)\times(0,1), \\ (2)\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,1], \\ (3)\ u(x,0) = f(x) \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ (4)\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,1) \text{ y continua en } [0,\pi]\times[0,1]. \end{cases} \qquad (14\ \textit{puntos})$$
   b) Probar que el candidato u a solución hallado en a) verifica:
      1) u es continua en $[0,\pi]\times[0,1]$.(5 puntos)
      2) $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}$. (5 puntos)

   Si se usa un resultado se debe enunciar. Solo enunciar, NO demostrar.

3. (16 puntos)
   a) Enunciar y demostrar el Teorema de Lyapunov 1. (8 puntos)
   b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Probar que la solución de
   $$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$
   está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. (8 puntos)

   Si se usa un resultado se debe enunciar. Solo enunciar, NO demostrar.