Segundo parcial de Ecuaciones Diferenciales.

27 de noviembre de 2014.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. *a*) Resolver la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty),$$

con las condiciones de borde

$$u(0,t) = u(L,t) = 0\ t \in [0,+\infty),$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x)\ x \in [0,L],$$
$$u_t(x,0) = v_0(x)\ x \in [0,L],$$

utilizando el método de separación de variables. Para este problema consideraremos que los datos iniciales u_0 y v_0 son series de senos de la forma

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right),\ x \in [0,L],$$

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right),\ x \in [0,L],$$

donde $a_k \neq 0$ y $b_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$.

b) Determinar condiciones sobre los coeficientes a_k y b_k que aseguren que la serie de funciones obtenida en la parte anterior define una función u de clase C^2 que verifica la ecuación de ondas así como las condiciones de borde e iniciales.

2. *a*) Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = yx \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases}$$

1) Encontrar los puntos críticos.
2) Linealizar en cada punto crítico y estudiar estabilidad (cuando sea posible). Justificar.
3) Hallar $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ distinta de la función nula y que sea constante sobre las órbitas del sistema.
4) Bosquejar el diagrama de fases y completar el estudio de estabilidad de todos los puntos críticos.

b) Enunciar y demostrar el teorema de Lyapunov que asegura la estabilidad de un punto de equilibrio.