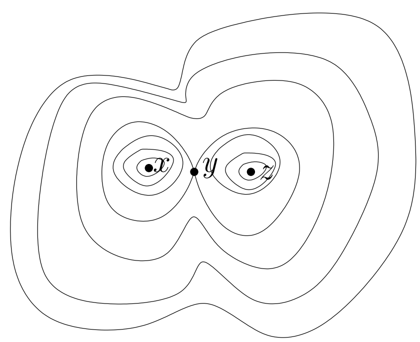
Segundo parcial de Ecuaciones Diferenciales.

28 de noviembre de 2013.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Se considera el sistema autónomo plano $\dot{x} = f(x)$, con $f : R^2 \to R^2$ en las hipótesis del teorema de Picard. En la figura se dibujaron curvas de nivel de una función $H : R^2 \to R$ de clase C^1 tal que $\frac{d}{dt}(H \circ x) = 0$ para toda solución $x(t)$ del sistema, y tal que los únicos puntos críticos de H son x, y, z.



   a) Demostrar que las soluciones del sistema están definidas para todo $t \in R$.

   b) Bosquejar un posible diagrama de fase del sistema, sabiendo que x, y, z son los únicos puntos de equilibrio.

   c) Estudiar la estabilidad de cada punto de equilibrio. Si un punto de equilibrio es estable (o inestable), demuéstrelo.

2. Usar el método de separación de variables para resolver el problema de conducción del calor en una barra asilada térmicamente también en sus extremidades. Es decir, determinar una función $u(x,t)$ definida en $\{(x,t) \in R^2 : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ tal que:

$$u_t = u_{xx}, 0 < x < L, t > 0,$$

$$u_x(0,t) = u_x(0,L) = 0, t > 0,$$

$$u(x,0) = x^2, 0 \leq x \leq L.$$

   Sug.: si lo necesita puede aceptar que

$$\frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \left(\frac{2L}{k\pi}\right)^2 (-1)^k.$$

3. *a*) Dibujar los posibles diagramas de fase de una ecuación lineal $\dot{x} = Ax$ donde A es una matriz diagonal 2×2 con valores propios λ_1, λ_2 reales.

b) Encontrar la solución con condición inicial $x(0) = (1950, 2014)$.

c) Bosquejar el diagrama de fase y estudiar la estabilidad en $(0,0)$ de:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + y^2 \\ \dot{y} = 2y + x^2 + y^2 \end{cases}$$