Ecuaciones Diferenciales
Segundo parcial

26 de noviembre de 2012.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. *a*) Probar la unicidad del siguiente problema:
   - $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ para $x \in (0, L)$ y $t \in (0, +\infty)$ con u de clase C^2.
   - $u(0,t) = u(L,t) = 0$, para todo $t \in (0, +\infty)$.
   - $u(x, 0) = f(x)$, para $0 \leq x \leq L$.
   - $u_t(x, t) = g(x)$, para $0 \leq x \leq L$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período 2π con f'' continua. Probar que

   $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx) \text{ converge uniformemente a } f.$$

   donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f. Enuciar los resultados que se utilicen.

2. *a*) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - x$. Hallar la serie de Fourier de tipo senos de f.

   b) Encontrar una expresión en serie de funciones para la solución de la ecuación:
   - $u_t = u_{xx}$, $(x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty)$.
   - $u(0, t) = u(1, t) = 0$, para todo $t \in (0, +\infty)$.
   - $u(x, 0) = x^2 - x$, para $0 \leq x \leq 1$.

   c) Probar que la serie de funciones hallada es solución de la ecuación.(Enuciar los resultados que se utilicen.)

   d) Resolver la ecuación:
   - $u_t = u_{xx}$, $(x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty)$.
   - $u(0, t) = 0$, para todo $t \in (0, +\infty)$.
   - $u(1, t) = 1$, para todo $t \in (0, +\infty)$.
   - $u(x, 0) = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

Todas las partes valen 10 puntos.

Se recuerda

$$\int x sen(ax) dx = \frac{sen(ax)}{a^2} - \frac{x cos(ax)}{a} + K$$

$$\int x^2 sen(ax) dx = \frac{2x.sen(ax)}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) cos(ax) + K$$