Ecuaciones Diferenciales
Segundo parcial

28 de noviembre de 2011.

No. Parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. Probar, enunciando los resultados que se apliquen, que

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh \pi} - 1\right).$$

Sugerencia: Considerar la función $f(x) = e^x$, para $x \in [-\pi, \pi]$ y hallar la serie de Fourier de f. Puede ser útil recordar que:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\int e^x \cos(ax) = \frac{e^x}{1+a^2}(cos(ax)+a.sen(ax)), \int e^x \operatorname{sen}(ax) = \frac{e^x}{1+a^2}(sen(ax)-a.cos(ax)).$$

2. *a*) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una sucesión de funciones continuas en $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f entonces f es continua en x.

   b) Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x^2}{(1+x^2)^i}$$

   Estudiar convergencia uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$.

3. *a*) Sabiendo que las soluciones ϕ de la ecuación diferencial $t^2x'' + tx' - a^2x = 0$, para $a > 0$, con $\phi(0) = 0$ son $\phi(t) = A.t^a$, encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$x^2u_{xx} + xu_x + u_{yy} = 0,$$

   definida en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ tal que:

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ny}{n^4} \end{cases}$$

   Sugerencia: Buscar soluciones de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

   b) Probar que la solución hallada en la parte anterior es solución de la ecuación.