Segundo parcial de Ecuaciones Diferenciales.

29 de noviembre de 2010.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Sea $f : I\!R \to I\!R$ impar y periódica de período 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -x + \pi \text{ si } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

   a) Hallar la serie de Fourier asociada a f.

   b) Calcular, justificando la suma de la serie $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

   c) Se considera el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

   Resolver utilizando el método de separación de variables

2. *a*) Enunciar y demostrar el teorema de Lyapunov referente a la estabilidad.

   b) Se considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

   i) Determinar la linearización del sistema anterior en un entorno de $(0,0,0)$.

   ii) Resolver el sistema lineal, y discutir la estabilidad en el origen. ¿Qué conclusiones puede hacer a partir de esto sobre la estabilidad en el origen del sistema no lineal?

   c) Estudiar estabilidad en el origen del sistema no lineal de la parte anterior. Sug: Buscar una función de Lyapunov de la forma $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$.