Segundo parcial Ecuaciones Diferenciales.

3 de diciembre de 2008.

No. Parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

(1) (20 puntos) Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1 tal que $F(0) = 0$, se considera la ecuación diferencial

$$\dot{X} = F(X) \tag{1}$$

(a) **(Una versión débil del teorema de Cetaev)**(10 puntos)
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un entorno del origen. Demostrar que si existe una función $V : U \to \mathbb{R}$, C^1 tal que $V(0) = 0$, $V(X) \leq 0$, $\forall X \in U$ y $\dot{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle < 0\ \forall X \in U \setminus \{0\}$ entonces 0 es un punto de equilibrio inestable de (1)

(b) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (2y + 2x^3, -2x + 3y^5)$. Se considera el sistema

$$(\dot{x}, \dot{y}) = F(x, y) \quad \text{y su aproximación lineal} \quad (\dot{x}, \dot{y}) = Df_{(0,0)}(x, y)$$

(i) Estudiar la estabilidad del origen en el sistema no lineal.(3 puntos)
(ii) Estudiar la estabilidad del origen en el sistema lineal. (3 puntos)
(iii) ¿Los resultados de la partes anterior contradicen el teorema de Hartman? Justificar.(4 puntos)

(2) (20 puntos) Sea $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una función impar tal que $f(x) = x(2\pi - x)$, $\forall x \in [0, 2\pi]$.

(a) Si la serie de Fourier asociada a f es $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sen(\frac{nx}{2})$, entonces:
(i) $b_{2k} = 0$ y $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^2} sen(\frac{(2k+1)\pi}{2})$.
(ii) $b_{2k} = 0$ y $b_{2k+1} = \frac{32}{\pi(2k+1)^3}$
(iii) $b_{2k} = 0$ y $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^2} sen(\frac{k\pi}{2})$.
(iv) $b_{2k} = 0$ y $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^2} sen(\frac{(2k+1)\pi}{3})$.
(6 puntos por la opción correcta, -2puntos si no es la opción correcta, 0 punto por no contestar.)

(b) Sea la ecuación

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \\ u(t, 0) = 0 \text{ y } u_x(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = x(2\pi - x) & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Si $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$ es solución del problema entonces

$u_k(x, t) =$ .... (4 puntos)

(c) Demostrar que la solución anterior es efectiva. (10 puntos)

(3) (20 puntos) Se considera el sistema

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (-y - yx^3, x + x^4)$$

(a) Hallar los puntos de equilibrio.(4 puntos)
(b) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.(8 puntos)
(c) Probar que el intervalo maximal de cualquier solución es R.(8 puntos)
(Se sugiere considerar una función $V(x, y) = ax^n + by^m$).

$\int xsen(ax) = \frac{sen(ax)}{a^2} - \frac{xcos(ax)}{a}$.

$\int x^2 sen(ax) = \frac{2xsen(ax)}{a^2} - (\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3})cos(ax)$.