Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Ecuaciones Diferenciales.
Curso 2007

Segundo parcial

1. Sea el sistema
$$\dot{x} = x^2 + yx$$
$$\dot{y} = -xy - y^2$$
   (a) Hallar los puntos de equilibrio.
   (b) Probar que $E(x, y) = xy$ es una preintegral del sistema.
   (c) Dibujar el diagrama de fase y clasificar los puntos de equilibrio.

2. (a) Enunciar (**NO DEMOSTRAR**) el teorema de salida de compactos.
   (b) Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$, con $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Probar que el intervalo maximal de cualquier solución es $\mathbf{R}$.
   (c) Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$, con $x \in \mathbf{R}^n$ y $f : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ de clase C^1. Probar que si una solución φ cumple que $|\varphi(t)| \leq M$ $\forall t \in I$, siendo I el intervalo maximal, entonces I es no acotado.

3. Se considera la ecuación del calor con las siguientes condiciones iniciales y de borde:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall\, t \geq 0 \\ u(x,0) = 3sen(4x) + f(x) & \end{cases}$$
   Siendo
$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0, \pi/2] \\ -x + \pi & si \quad x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$
   (a) Si $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$ es solución del problema entonces
$$u_k(x,t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
   (b) Probar que lo hallado en (a) satisface la ecuación $u_t = u_{xx}$ con $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$.