Universidad de la República **Ecuaciones diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

PRIMER PARCIAL – SÁBADO 23 DE SETIEMBRE DE 2017

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.

a) Dibujar el diagrama de fase de la ecuación $x' = Ax$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Hallar la solución general de la ecuación $x' = Bx$, donde $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

(1) Se considera una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que f_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f ($f_n \rightrightarrows f$), entonces f es acotada.

(2) Demostrar que la sucesión de funciones

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n$$

no converge uniformemente, pero si puntualmente.

Ejercicio 3. Demostrar el Teorema de Picard. (*Se puede asumir el Teorema de punto fijo para contracciones.*)

Ejercicio 4. Se considera la ecuación diferencial $(\dot{x}, \dot{y}) = f(t,(x,y))$ con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en las condiciones del Teorema de Picard y tal que $f(t,(x,y)) = g(x,y)$ para todos $(t,(x,y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Se sabe que:

- $\{(x,y) : g(x,y) = (0,0)\} = \{(x,y) : y = x^2\}$
- $H(x,y) = x^3 - y$ es una preintegral (es decir, $H(x(t),y(t))$ es constante para toda solución $(x(t),y(t))$ de la ecuación).

Se pide:

(1) Dibujar un posible diagrama de fase.

(2) Demostrar que la solución por el punto $(1/2, 1/8)$ tiene intervalo maximal $\mathbb{R}$.

(3) Suponiendo que $\dot{x} > 0$ si $y < 0$, probar que el intervalo maximal por el punto $(0,-1)$ no está acotado superiormente.