Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Ecuaciones Diferenciales.
Curso 2007.

Primer parcial.

1. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

   (a) Calcular la matriz e^{At}. Resolver completamente el sistema:
   $$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

   (b) Realizar un diagrama de fases.

   (c) Estudiar la estabilidad y la estabilidad asintótica para el futuro de la solución $X(t) = (0,0)$.

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tal que $f_n : X \to \mathbf{R}$ para todo n.

   (a) Definir convergencia puntual y uniforme para $\{f_n\}$.

   (b) Probar que si f_n es continua $\forall n$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función f, entonces f es continua.

   (c) Consideremos ahora $f_n : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ tal que $f_n(x) = (sen(x))^n$.

      i. Hallar el límite puntual de $\{f_n\}$ en el conjunto $(-\pi/2, \pi/2)$.

      ii. Investigar la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en el conjunto $(-\pi/2, \pi/2)$.

   (d) Sea $F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$.

      i. Hallar el límite puntual de $\{F_n\}$ en el conjunto $(0, \pi/2)$.

      ii. Investigar la convergencia uniforme de $\{F_n\}$ en el conjunto $(0, \pi/2)$.

3. Sea la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

   (a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$.

   (b) Para $\alpha > 0$, hallar el subespacio estable $E^s = \oplus_{Re\lambda<0} E_\lambda$ (E_λ es el subespacio propio generalizado asociado al valor propio λ). Demostrar que si φ es una solución con $\varphi(0) \in E^s$ entonces $\varphi(t) \in E^s$ para todo $t \in \mathbf{R}$.

   (c) Discutir la estabilidad de $\dot{X} = AX$ según $\alpha \in \mathbf{R}$.

- Los ejercicios 1 y 2 valen 15 puntos y el ejercicio 3 vale 10 puntos.
-Resultados: martes 16/10.
-Muestra: miercoles 17/10 a las 15:30 hrs en el IMERL.