**Universidad de la República** | **Ecuaciones Diferenciales**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** | **2do semestre 2022**

SOLUCIÓN PRIMER PARCIAL

## VERDADERO O FALSO

Respuesta correcta 4 pts., respuesta incorrecta -2 pts.

**Ejercicio 1.**(16 pts.) Indicar si es verdadero (V) o falso (F):

### Versión 1

(1) $y(x) = \frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + (1-x)y = e^{2x}$

**VERDADERO:**

$$\begin{aligned} xy' + (1-x)y &= x \cdot \frac{(2x-1)e^{2x} + (1-x)e^{x}}{x^2} + (1-x) \cdot \frac{e^{2x}-e^{x}}{x} \\ &= \frac{(2x-1)e^{2x} + (1-x)e^{x} + (1-x)(e^{2x}-e^{x})}{x} = \frac{xe^{2x}}{x} = e^{2x}. \end{aligned}$$

(2) Si $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces para todo $t \in (0,+\infty)$ se tiene: $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^t g(s)ds$

**VERDADERO:**

Sea $H : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función $H(t) = 1$, tenemos

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(H(t))\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}((g*H)(t)),$$

donde en la última igualdad se usa que la transformada de Laplace de la convolución es el producto de las transformadas. Aplicando la antitransformada a ambos extremos de la cadena de igualdades, obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t))\right) = (g*H)(t) = \int_0^t g(s)H(t-s)ds = \int_0^t g(s)ds.$$

(3) La ecuación diferencial $\dot{x} = ax^2 + bx + c$ tiene un punto de equilibrio cualesquiera sean los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**FALSO:** La ecuación $\dot{x} = 1$ $(a = b = 0, c = 1)$ no tiene puntos de equilibrio, ya que $c = 1 \neq 0$.

(4) Se considera la ecuación diferencial lineal

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

donde el polinomio característico de $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tiene una raíz doble. Si $X(t) = (x(t), y(t))$ es una solución no constante, entonces la función $y(t)$ tiene un máximo relativo o un mínimo relativo.

**FALSO:** La matriz $A = \mathrm{Id}$ tiene valor propio doble $\lambda = 1$ y la curva $X(t) = (e^t, e^t)$ es una solución no constante. Sin embargo, $y(t) = e^t$ no tiene extremos relativos.

## Versión 2

(1) $y(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + (1-x)y = e^x$

**FALSO:**

$$\begin{aligned} xy' + (1-x)y &= x \cdot \frac{(2x-1)e^{2x} + (1-x)e^x}{x^2} + (1-x) \cdot \frac{e^{2x} - e^x}{x} \\ &= \frac{(2x-1)e^{2x} + (1-x)e^x + (1-x)(e^{2x} - e^x)}{x} = \frac{xe^{2x}}{x} = e^{2x}. \end{aligned}$$

(2) Si $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces para todo $t \in (0, +\infty)$ se tiene: $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}g(t)$

**FALSO:** Observar que la expresión de la derecha no tiene sentido: debe ser una función en la variable $t$. Por ejemplo si tomamos $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = 1$, se tiene:

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Por lo tanto $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t))\right) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t \neq \frac{1}{s}g(t) = \frac{1}{s}$.

(3) La ecuación diferencial $\dot{x} = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de equilibrio cualesquiera sean los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**VERDADERO:** Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene una raíz real (una forma de verlo es tomando límites en $\pm\infty$ y usar Bolzano). Esto quiere decir que cualesquiera sean los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\dot{x}$ se anula al menos en un punto, y por lo tanto ese punto es de equilibrio de la ecuación diferencial.

(4) Se considera la ecuación diferencial lineal

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

donde el polinomio característico de $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tiene una raíz compleja con parte real nula. Si $X(t) = (x(t), y(t))$ es una solución no constante, entonces la función $y(t)$ tiene un máximo relativo y un mínimo relativo.

**VERDADERO:** Si $\pm ib$ son las raíces del polinomio característico, entonces $A$ se escribe como $A = P \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{smallmatrix}\right) P^{-1}$, donde $P = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right)$ es matriz de cambio de base. La solución general de la ecuación lineal es:

$$X(t) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \cos(-bt + \theta_0) \\ r_0 \sin(-bt + \theta_0) \end{pmatrix} = r_0 \begin{pmatrix} p\cos(-bt + \theta_0) + q\sin(-bt + \theta_0) \\ r\cos(-bt + \theta_0) + s\sin(-bt + \theta_0) \end{pmatrix}.$$

Las soluciones recorren elipses centradas en el origen. La segunda coordenada $y(t) = r_0(r\cos(-bt + \theta_0) + s\sin(-bt + \theta_0))$ es una función periódica; tiene tanto máximos como mínimos relativos.

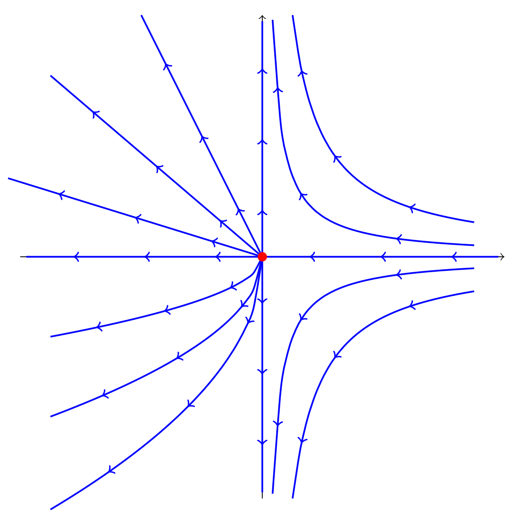
## MÚLTIPLE OPCIÓN

Respuesta correcta 4 pts., respuesta incorrecta -2 pts.

**Ejercicio 2.**(4 pts.) Lo que sigue es el bosquejo del diagrama de fase correspondiente a una ecuación diferencial

$$\dot{X} = F(X),$$

donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



La opción correcta es:

$$F(x, y) = \begin{cases} (-x, 4y), & x \geq 0, y \geq 0 \\ (4x, 4y), & x < 0, y \geq 0 \\ (4x, y), & x \leq 0, y < 0 \\ (-x, y), & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Es la opción (2) en la versión 1 y la opción (3) en la versión 2 (para saber cuál versión tenían mirar el VERDADERO o FALSO).

Veamos que es coherente con el diagrama de fase. Para eso estudiamos la solución $X(t) = (x(t), y(t))$ con condición inicial $X(0) = (x_0, y_0)$ según el cuadrante en que se encuentra dicho punto:

- Si $x_0 = 0$, entonces la solución es de la forma $X(t) = (0, y_0e^{4t})$ si $y_0 \geq 0$ y $X(t) = (0, y_0e^t)$ si $y_0 < 0$. Por otro lado, si $y_0 = 0$, entonces $X(t) = (x_0e^{-t}, 0)$ si $x_0 \geq 0$ y $X(t) = (x_0e^{4t}, 0)$ si $x_0 < 0$. Esto nos da las soluciones que recorren los ejes, con el sentido indicado en el diagrama en cada caso.

- Si $x_0, y_0 > 0$, entonces la solución es $X(t) = (x_0e^{-t}, y_0e^{4t})$. Al estudiar el comportamiento a futuro de $X(t)$ vemos que la primera coordenada tiende a 0, mientras que la segunda tiende a $+\infty$. Para el pasado la primera coordenada de $X(t)$ tiende a $+\infty$ y la segunda a 0 para el pasado. Esto nos da las órbitas dibujadas en el diagrama en el primer cuadrante.

  El comportamiento en el caso $x_0 > 0$, $y_0 < 0$ (cuarto cuadrante) es similar.

- Si $x_0 < 0$ y $y_0 > 0$ se tiene $X(t) = (x_0e^{4t}, y_0e^{4t}) = e^{4t}(x_0, y_0)$. Tenemos entonces que la órbita de $X(t)$ es una semirrecta y se cumple $\lim_{t\to-\infty} X(t) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} \|X(t)\| = +\infty$. Observar que esto es coherente con el dibujo de las órbitas en el segundo cuadrante.

- Si $x_0, y_0 < 0$, entonces $X(t) = (x_0e^{4t}, y_0e^t)$. De aquí podemos deducir que el comportamiento para $t \to +\infty$ y $t \to -\infty$ es similar al caso anterior. Sin embargo las órbitas no son semirrectas, pues al graficar $y = y(t)$ en función de $x = x(t)$ obtenermos
$$y = \frac{y_0}{x_0^{1/4}} x^{1/4}.$$
  Es decir, la órbita es el gráfico de una función cóncava, lo que se corresponde con la forma que adoptan las órbitas dibujadas en el tercer cuadrante del diagrama.

Para descartar las demás opciones podemos hacer las siguientes apreciaciones:

- Tanto en la opción (1) como la opción (4) tenemos que la ecuación $\dot{X} = F(X)$ es una ecuación lineal del tipo $\dot{X} = AX$, con $A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ . Estas ecuaciones fueron estudiadas y clasificadas completamente en el curso, incluyendo sus diagramas de fase, por lo que sabemos que el diagrama de fase de la figura no se correponde con el de una ecuación lineal. Mirando por ejemplo el sentido de las flechas en el eje $Ox$, tenemos $A((1,0)) = \lambda(1,0),\ \lambda < 0$ y $A((-1,0)) = \nu(-1,0) = -\nu(1,0),\ \nu > 0$, lo cual obviamente contradice que $A((-1,0)) = -A((1,0))$.

- En la opción restante la solución con condición inicial $(x_0, y_0)$ con $x_0 < 0$ y $y_0 > 0$ es de la forma $X(t) = (x_0e^t, y_0e^{4t})$. Se observa aquí que las órbitas en este segundo cuadrante no son semirrectas como en el diagrama.

## EJERCICIOS DE DESARROLLO

**Ejercicio 3.**(8 pts.) Se considera la ecuación diferencial
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(1) Hallar la solución general de la ecuación.

(2) Bosquejar el gráfico de las soluciones y dibujar el diagrama de fase de la ecuación diferencial.

(1) Si $x_0 = 0$ la solucion es $x(t) = 0$ para todo $t$. En caso contrario, para hallarla podemos utilizar el método de variables separables:

$$\dot{x} = x^2 \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x^2} = 1$$

Luego integrando entre 0 y $t$:

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{x^2} dt = \int_0^t dt$$

Aplicando el cambio de variable $u = x(t)$ obtenemos:

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{x^2} dt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}|_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

Del lado derecho integrando:

$$\int_0^t dt = t$$

Luego:

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t \Rightarrow \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} - t$$

Así que:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

es la solución de la ecuación diferencial para todo $x_0 \neq 0$.

(2) Bosquejo gráfico de las soluciones:

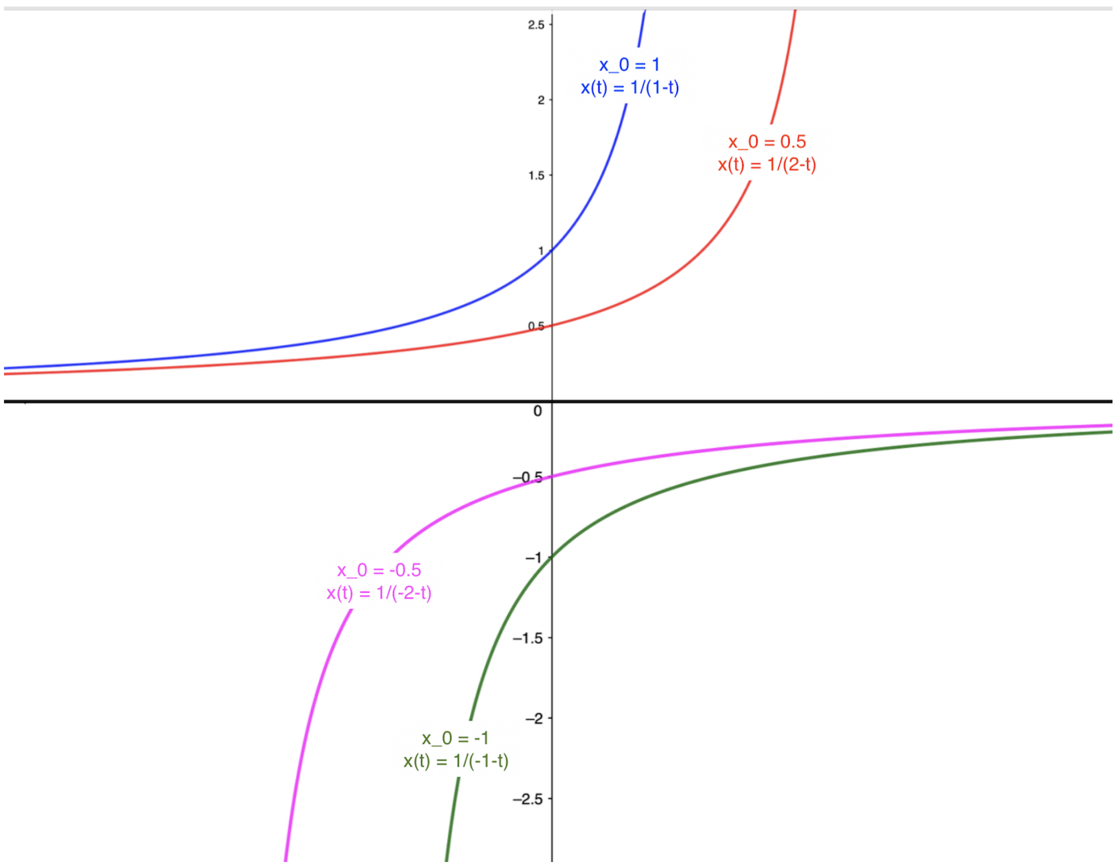
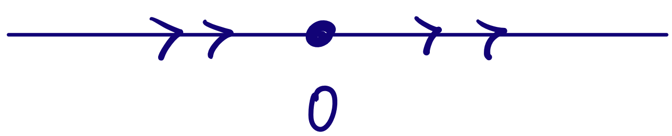



Diagrama de fase:




**Ejercicio 4.**(12 pts.) Se considera la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Se sabe que las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = |A - \lambda Id|$ son $-1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ y $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$. Además, $A(1,2,3) = (-1,-2,-3)$ y $A(-1, 1+i, 1-i) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i)(-1, 1+i, 1-i)$.

(1) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$.

(2) Hallar los puntos de equilibrio de dicha ecuación y decir si son estables a futuro, justificando su respuesta.

(1) La solución general de la ecuación es $X(t) = e^{At}X_0$. Para calcular $e^{At}$ tenemos toda la información. En primer lugar, los valores propios de $A$ son $-1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ y $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ por lo cual sabemos que existe $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertible tal que

$$P^{-1}AP = E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Además, por lo estudiado en el curso sabemos que $e^{Et} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t}\cos(\frac{1}{3}t) & e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{1}{3}t) \\ 0 & -e^{\frac{1}{2}t}\sin(\frac{1}{3}t) & e^{\frac{1}{2}t}\cos(\frac{1}{3}t) \end{pmatrix}$

y por lo tanto $e^{At} = Pe^{Et}P^{-1}$. Para hallar la matriz $P$ también tenemos toda la información, ya que el vector $(1, 2, 3)$ es propio asociado al valor propio $-1$ y el vector $(-1, 1+i, 1-i)$ es propio (en $\mathbb{C}^3$) asociado al valor propio $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$. Descomponiendo el vector en parte real e imaginaria obtenemos los dos vectores de $\mathbb{R}^3$ que necesitamos:

$$(-1, 1+i, 1-i) = (-1, 1, 1) + i(0, 1, -1).$$

Por lo tanto, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La solución general de la ecuación es entonces $X(t) = Pe^{Et}P^{-1}X_0$, donde $P$ y $e^{Et}$ son las calculadas.

(2) La ecuación tiene un único punto de equilibrio en el origen ya que 0 no es valor propio de la matriz $A$. Además, el punto de equilibrio es inestable, porque la matriz $A$ tiene un valor propio con parte real positiva.