N^o de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas MO

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4

Importante

- El parcial dura 2 horas.
- El parcial es de 40 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas, a excepción del ejercicio 5.
- En cada ejercicio MO hay una sola opción correcta.
- No se restan puntos por respuesta incorrecta en los ejercicios MO.

Ejercicio 1 (7 puntos)

Sea $x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} + g(t)$ con $g(t)$ acotada. Los valores de a y b para los cuales $x(t)$ es solución de $\ddot{x} + (a+3)\dot{x} + bx = -\cos(t)$ para todo α y β satisfacen:

(A) $b > 0 \quad a = -3$

(B) $a = -3 \quad b = -1$

(C) $b = -3 \quad a = 0$

(D) a cualquiera $\quad b = 0$

(E) $b = 0 \quad a = -3$

Ejercicio 2 (7 puntos)

Si $\phi(t)$ es la solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{2t} \\ \dot{y} = x + 2y - e^{2t} \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Entonces $\phi(1)$ es:

(A) $(-2e + 4e^3/3 + e^2, 2e + 4e^3/3 - e^2)$

(B) $(-3e/2 + 3e^3/2 + e^2, 3e/2 + 3e^3/2 - e^2)$

(C) $(3e + 3e^3/2 - e^2, 3e + 3e^3/2 + e^2)$

(D) $(3e^3/2 + e, 3e/2 + e^3)$

(E) $(-4e/3 + 4e^3/3 + e^2, 4e/3 + 4e^3/3 - e^2)$

Observar que $(-1,1)$ y $(1,1)$ son vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3 (7 puntos)

Considerar la ecuación lineal $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ con A una matriz constante de 2×2. Indicar qué diagrama de fase se corresponde con las siguientes opciones para la matriz A:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}$

Fig 1

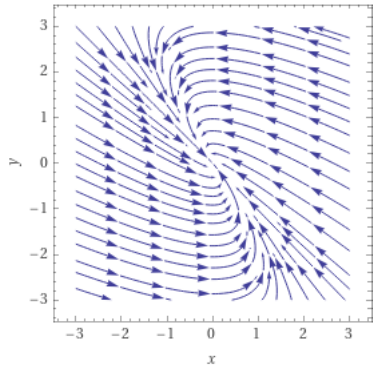


Fig 3

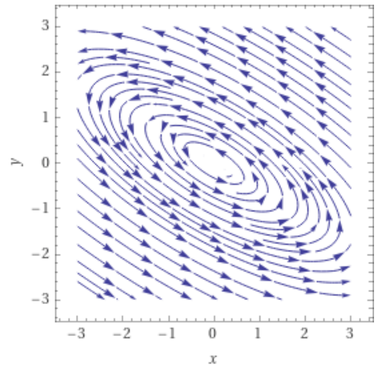


Fig 2

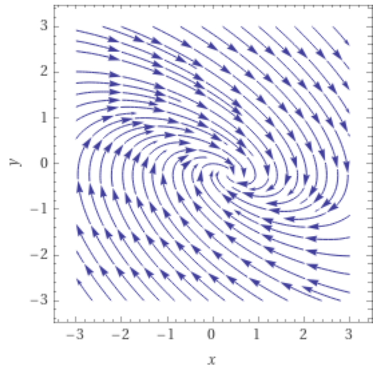
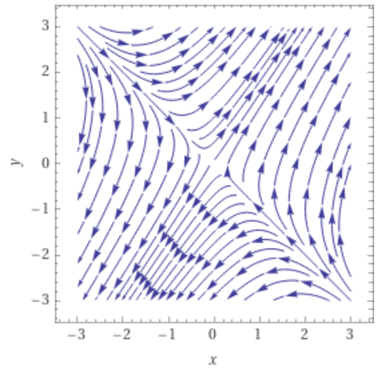


Fig 4



Respuesta:

(A) $A_1 \to$ Fig 4, $A_2 \to$ Fig 1, $A_3 \to$ Fig 3, $A_4 \to$ Fig 2

(B) $A_1 \to$ Fig 1, $A_2 \to$ Fig 2, $A_3 \to$ Fig 3, $A_4 \to$ Fig 4

(C) $A_1 \to$ Fig 2, $A_2 \to$ Fig 3, $A_3 \to$ Fig 1, $A_4 \to$ Fig 4

(D) $A_1 \to$ Fig 3, $A_2 \to$ Fig 1, $A_3 \to$ Fig 4, $A_4 \to$ Fig 2

(E) $A_1 \to$ Fig 4, $A_2 \to$ Fig 1, $A_3 \to$ Fig 2, $A_4 \to$ Fig 3

Ejercicio 4 (7 puntos)

Determine si el teorema de Picard garantiza o no la existencia y unicidad de una solución local para los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{x} = \sqrt{|t-x|}, \quad x(2) = 2$
2. $\dot{x} = \sqrt{|t-x|}, \quad x(2) = 1$
3. $\dot{x} = \frac{t-1}{x}, \quad x(0) = 1$
4. $\dot{x} = f(t,x), \quad x(1) = 0$ con $f : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = \min\left\{\frac{x}{t}, t\right\}$

Respuesta:

(**A**) El teorema solo garantiza solución local única para 2. y 3.

(**B**) El teorema garantiza solución local única para todas menos 4.

(**C**) El teorema solo garantiza solución local única para 1. y 3.

(**D**) El teorema garantiza solución local única para todas menos 1.

(**E**) El teorema solo garantiza solución local única para 3.

Ejercicio 5 Desarrollo (12 puntos)

¿Pueden las soluciones de ecuaciones autónomas del tipo $\dot{x} = f(x)$ tener un máximo local estricto? Asumir que la función f es de clase C^1.

Recordar que para una función $x(t)$, un máximo local estricto en el tiempo $t = a$ significa que $x(a)$ es mayor que cualquier valor cercano de $x(t)$.