Universidad de la República **Ecuaciones Diferenciales**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Octubre 2020**

PRIMER PARCIAL – SOLUCIÓN

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1.(10 pts.)

(1) Hallar $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^{2x} \cos x$ sea solución de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0$$

(2) Hallar la solución de dicha ecuación que verifica $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

(1) Se tiene que:

$$y'(x) = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$$

$$y''(x) = 4e^{2x} \cos x - 2e^{2x} \sin x - 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x$$

Por lo tanto, para que $y(x)$ sea solución de la ecuación diferencial, se debe verificar la siguiente igualdad:

$$e^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x) + ae^{2x}(2 \cos x - \sin x) + be^{2x} \cos x = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ -4 - a = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

(2) Se tiene una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y a coeficientes constantes. Por lo tanto, la solución se puede hallar a través del método del polinomio característico:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = 2 \pm i$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$$

Donde las constantes C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales:

$$\rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 1 \\ y'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 2C_1 + C_2 = 1 \quad \rightarrow \quad C_2 = -1 \end{cases}$$

La solución al problema con condiciones iniciales resulta:

$$y(x) = e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$$

Ejercicio 2.(10 pts.) Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = g(t)$.

Demostrar **usando la transformada de Laplace** que

$$x(t) - x(0) = \int_0^t g(s) ds$$

(sin utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo.)
Se asume la existencia de las transformadas de todas las funciones involucradas.

Llamemos $X(s)$ y $G(s)$ a las transformadas de $x(t)$ y $g(t)$, respectivamente. Sabemos que la transformada de $\dot{x}(t)$ es $sX(s) - x(0)$. Por lo tanto, transformando la ecuación $\dot{x} = g(t)$ tenemos que:

$$sX(s) - x(0) = G(s) \Rightarrow X(s) - x_0 \frac{1}{s} = \frac{G(s)}{s}$$

Ahora aplicamos transformada inversa, sabiendo que la misma es lineal:

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] - x_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_0^t g(s)\, ds$$

Para el último paso usamos que $\frac{1}{s}$ es la transformada de la función constante 1 y que $\frac{G(s)}{s}$ es la de $\int_0^t g(s)\, ds$. Esa última antitransformada también puede pensarse usando la transformada de la convolución: como G es la transformada de g y $\frac{1}{s}$ es la de la función constante 1, el producto $G(s)\frac{1}{s}$ es la transformada de $(g * 1)(t) = \int_0^t g(s).1\, ds = \int_0^t g(s)\, ds$.

Ejercicio 3.(10 pts.) Se considera la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - 3/16 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(1) Demostrar que para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ existe y es única la solución de la ecuación diferencial.

(2) Bosquejar el gráfico de las soluciones en el plano tx y dibujar el diagrama de fase de la ecuación diferencial.

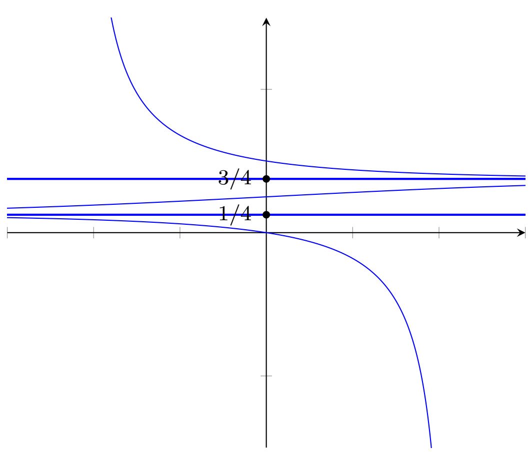
Nota: no es necesario calcular explícitamente las soluciones.

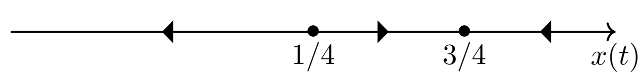
(1) Es claro que la función $f(t,x) = x(1-x) - 3/16$ es continua. Vamos a verificar que es de clase C^1. La derivada parcial según t es $f_t(t,x) = 0$ y la derivada parcial según x es $f_x(t,x) = -2x+1$. Como ambas existen y son continuas concluimos que la función es de clase C^1. Luego, un resultado visto en el curso nos dice que las funciones de clase C^1 son localmente Lipschitz según la variable espacial. Al estar en las hipótesis del teorema de Picard concluimos que la solución al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

existe y es única.

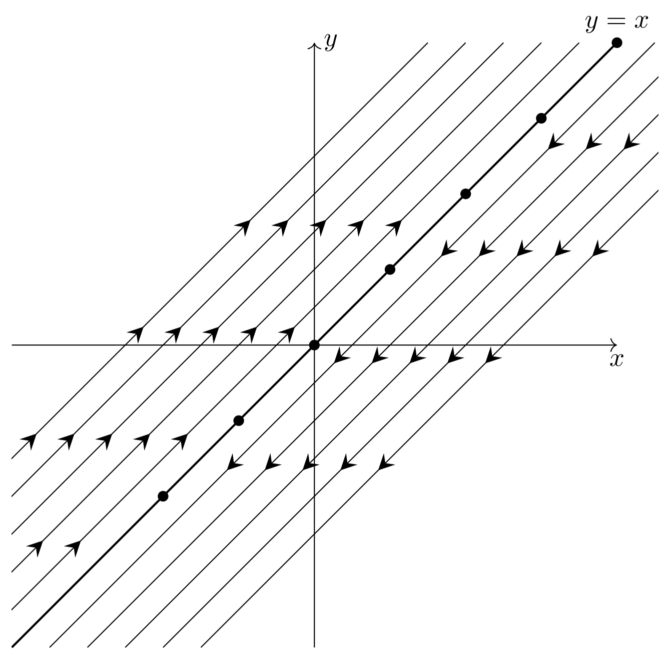
(2) Para bosquejar las soluciones y dibujar el diagrama de fases primero buscamos las soluciones de equilibrio, estas son de la forma $x(t) = x_0$. Una solución de este tipo debe cumplir que $x_0(1-x_0) - 3/16 = 0$. Resolviendo esta ecuación concluimos que las soluciones de equilibrio son $x(t) = 1/4$ y $x(t) = 3/4$. Calculando el signo de $x(1-x) - 3/16$ concluimos que las soluciones son decrecientes cuando $x \in (-\infty, 1/4) \cup (3/4, +\infty)$ y decrecientes en $(1/4, 3/4)$. De este análisis concluimos cómo se ven los gráficos de las soluciones y el diagrama de fase :



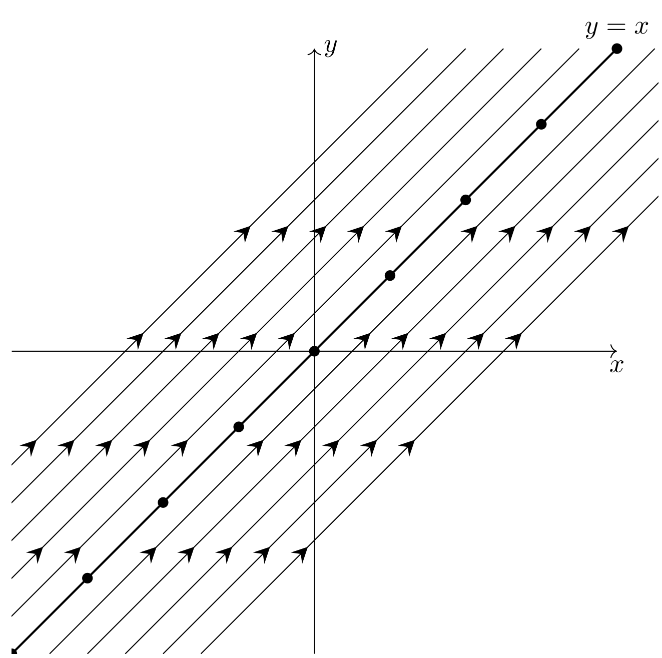


Ejercicio 4.(10 pts.) *Nota: en cada caso todos los puntos de la recta $y = x$ son puntos de equilibrio.*

(1) Encontrar un sistema lineal de manera que el diagrama de fase se corresponda con la siguiente figura:



(2) ¿Es posible definir un sistema lineal de manera que el diagrama de fase se corresponda con la siguiente figura? Justifique su respuesta.



(1) Sabemos que el sistema que estamos buscando es de la forma $\dot{X} = AX$, donde $X \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Como tenemos un recta de puntos de equilibrio formada por los puntos de la forma (x, x), tenemos que $(1, 1)$ es vector propio asociado al valor propio 0.

Tenemos entonces dos opciones: o bien la matriz A es diagonalizable, o bien es semejante a una matriz de Jordan J, con único valor propio 0. Si estuviéramos en el primer caso, entonces tendríamos que tener otro vector propio, de donde habría otro subespacio invariante (recta por el origen). Como esto no ocurre, sabemos que estamos en el segundo caso.

Es decir que nuestra matriz A se puede ver como $A = PJP^{-1}$, donde P es la matriz de cambio de base, y $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resta ahora entender la matriz de cambio de base. Como $(1, 1)$ es vector propio de A asociado al valor propio 0, entonces será la segunda columna de P.

Para la primer columna, precisamos un vector v tal que $Av = (1, 1)$. Por el diagrama que nos dieron, P debe revertir orientación, es decir que tiene que tener determinante negativo, así que podemos tomar v como cualquier vector perteneciente al semiplano que apunte *a la izquierda* de la dirección dada por el vector $(1, 1)$. Tomando entonces $v = (-1, 0)$ nos queda $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallando P^{-1}, y sustituyendo en la ecuación $A = PJP^{-1}$, recuperamos el sistema lineal que nos da el diagrama pedido: $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Es fácil chequear que este sistema tiene el diagrama de fase de la figura.

Otra forma: Se puede ver en la figura que a cada punto (x, y) que no pertenece a la recta $y = x$ le corresponde un vector velocidad paralelo a la dirección $(1, 1)$, y que sobre la recta $y = x$ se anula el vector velocidad. Por lo tanto $f(x, y)(1, 1)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua que se anula sobre la recta $y = x$ es un buen candidato para campo de vectores. Como estamos buscando un sistema de la forma $\dot{X} = AX$, y tomando en cuenta el sentido de las flechas, podemos tomar $f(x, y) = y - x$. Es fácil chequear que este sistema tiene el diagrama de fase de la figura.

(2) No es posible. Observemos que para las posiciones opuestas $X_1 = (1, 0)$ y $X_2 = (-1, 0) = -X_1$, las velocidades respectivas V_1 y V_2 tienen el mismo sentido. Si el sistema fuera lineal $\dot{X} = BX$, tendríamos $V_1 = BX_1 = -BX_2 = -V_2$, lo cual es una contradicción.