Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

PRIMER PARCIAL - 21 DE SETIEMBRE DE 2019. DURACIÓN: 3:30

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE			
Ej 1	Ej 2	Ej 3	**Total**

Ejercicio 1.(14 puntos)

Dada la ecuación

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -x \end{cases} \quad \text{con condición inicial} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}:$$

1. Usando transformada de Laplace, hallar la solución general. (5 puntos)
2. Bosquejar el diagrama de fase. (5 puntos)
3. Estudiar la estabilidad de la solución $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. (4 puntos)

Ejercicio 2. (14 puntos)

Consideremos la ecuación $x' = t\,\mathrm{sen}^2(x)$.

1. Buscar soluciones constantes. (3 puntos)
2. Probar que el intervalo maximal de cualquier solución maximal es $\mathbb{R}$. (4 puntos)
3. Hallar los puntos donde la derivada de las soluciones se hace cero y clasificarlos (es decir, determinar si son máximos o mínimos). (3 puntos)
4. Realizar un bosquejo del gráfico de las soluciones. (4 puntos)

Ejercicio 3.(12 puntos)

1. Enunciar (no demostrar) el Teorema de escape de compactos. (2 puntos)
2. Enunciar (no demostrar) la desigualdad de Grönwall. (2 puntos)
3. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Probar que el intervalo maximal de las soluciones a la ecuación lineal $\dot{X} = AX$ con $X(t_0) = X_0$ es $\mathbb{R}$. (4 puntos)
4. Sea la ecuación lineal de segundo orden $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = y_0$.
   a) Probar que el intervalo maximal de las soluciones es $\mathbb{R}$. (2 puntos)
   b) Probar que $V = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ a\ddot{\varphi}(t) + b\dot{\varphi}(t) + c\varphi(t) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial de dimensión dos. (2 puntos)