Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia // Facultad de Ingeniería // Universidad de la República

Ecuaciones Diferenciales
Primer parcial

22 de setiembre de 2018.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1 (12 puntos)

1. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Dibujar el diagrama de fase de la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

2. Considere la ecuación de segundo orden $x'' + 2x' + 2x = 0$, con condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -1$. Escriba el sistema equivalente $\dot{X} = AX$. Describa el comportamiento de la solución $x(t)$.

Ejercicio 2 (10 puntos)
Consideremos la ecuación diferencial

$$\text{(E)} \quad x' = (x-t)^2 + 1.$$

1. Hallar la solución general de (E). (Sugerencia: hacer un cambio de variable apropiado.)
2. Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ la solución maximal de la ecuación con condición inicial $x(0) = 1$.
   a) ¿Cuál es el intervalo I?
   b) ¿Cuál es el conjunto de valores alcanzados por φ, es decir, el conjunto $\varphi(I)$?

Ejercicio 3 (10 puntos)
Considerar el sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^x - 1 \\ \dot{y} &= ye^x \end{cases}$$

1. Hallar los puntos de equilibrio.
2. Probar que toda solución $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ está contenida en el eje y o en la curva de ecuación $y = c(e^x - 1)$, para algún $c \in \mathbb{R}$.
3. Esbozar el diagrama de fase de la ecuación, explicando cómo lo hace.

Escoger uno y sólo uno de los siguientes dos ejercicios:

Ejercicio 4 (8 puntos)
Consideremos I un intervalo abierto y O un abierto de $\mathbb{R}^d$. Sea $f : I \times O \to \mathbb{R}^d$ continua.

1. Justifique la siguiente afirmación. Si $(t_0, x_0) \in I \times O$ entonces existe un intervalo cerrado $I_1 = [\alpha_1, \alpha_2]$ y una bola cerrada $\overline{B}(x_0, \beta)$ tal que $(t_0, x_0) \in I_1 \times \overline{B}(x_0, \beta)$ y que $||f(t,x)|| \leq M$, para todo $(t,x) \in I_1 \times \overline{B}(x_0, \beta)$ y una constante M.
2. Definamos para $\varphi : I_1 \to \overline{B}(x_0, \beta)$, $T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$. Demuestre que para $t \in I_\alpha = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset I_1$

$$||T(\varphi)(t) - x_0|| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha.$$

Además que la función $T(\varphi)$ es uniformemente continua en el intervalo I_α. Sugerencia: debe evaluar la norma de la diferencia $T(\varphi)(t_1) - T(\varphi)(t_2)$.

Decimos que f es $Lip(t)$ si existe una función $k : I \to \mathbb{R}^+$ (no necesariamente acotada) tal que $\int_I k^2(t)dt < +\infty$, tal que

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq k(t)||x - y||.$$

En el resto del ejercicio, f es una función $Lip(t)$.

3. Sea $\mathcal{F} = \{\varphi : I_\alpha \subset I_1 \to \overline{B}(x_0, \beta) : \varphi \text{ continua}\}$. Halle α de modo que $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ sea una contracción. (Recuerde que por la desigualdad de Schwarz $\int_a^b |k(s)|ds \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |k(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$).
4. Concluya por usted mismo la demostración del Teorema de Picard, bajo esta nueva hipótesis.

Ejercicio 5 (8 puntos)
Sean tres funciones continuas φ, ψ, χ definidas en un intervalo de la recta $I = [a, b]$. Supongamos para $t \in I$ se tiene $\chi(t) > 0$ y también que se cumple

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)ds. \tag{1}$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar una desigualdad más general que la de Gronwall (2).

1. Defina $R(t) = \int_a^t \chi(s)\varphi(s)ds$. Demuestre que
$$R'(s) - \chi(s)R(s) \leq \chi(s)\psi(s).$$
2. Multiplicando por $e^{-\int_a^s \chi(u)du}$, integre de manera exacta el lado izquierdo de la precedente desigualdad.
3. Utilice (1) para obtener
$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t \chi(u)du} ds. \tag{2}$$