Ecuaciones Diferenciales
Primer parcial

24 de setiembre de 2016.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1 (10 puntos)
Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular e^{At} escribiéndola de la forma $Pe^{Jt}P^{-1}$(8 puntos)
2. Hallar la solución de $\dot{x} = Ax$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

Ejercicio 2 (7 puntos)
Se considera la ecuación $\dot{x} = t - x^4$.

1. Estudiar el signo de $\dot{x}$. (2 puntos)
2. Sea φ la solución que cumple $\varphi(0) = c$ con $c > 0$. Probar que el intervalo maximal de φ es no acotado superiormente. (5 puntos)

Ejercicio 3 (16 puntos)
1. Sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones continuas, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n converge uniformemente a f en $[a, b]$.
   a) Probar que $\int_a^x f_n(s)\,ds$ converge uniformemente a $\int_a^x f(s)ds$.(6 puntos)
   b) Probar que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(s)\,ds = \int_a^b f(s)ds$.(2 puntos)
2. Consideremos la siguiente familia de funciones $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
   a) Estudiar convergencia puntual en $[0, 2]$. (2 puntos)
   b) Probar que no converge uniformemente en $[0, 2]$. (2 puntos)
   c) Sean $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(1) = 0$ y una nueva familia de funciones $h_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$, dadas por $h_n(x) = g(x)f_n(x)$. ¿La sucesión h_n converge uniformemente en $[0, 2]$? Justificar. (4 puntos)

Ejercicio 4 (7 puntos)
Sea la ecuación

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si} \quad (t, x) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (t, x) = (0, 0) \end{cases}$$

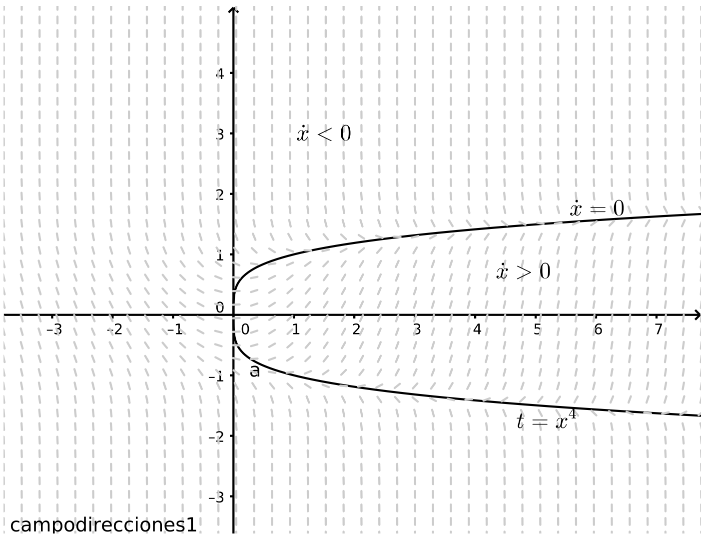
1. Probar que $x(t) = c^2 - \sqrt{t^4 + c^4}$ es solución para todo $c \in \mathbb{R}$ con la condición $x(0) = 0$. (2 puntos)
2. Determinar la razón por la cual no se esta en las hipótesis del Teorema de Picard. Justificar. (5 puntos)

1. *a*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces el polinomio característico $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$ y tiene raíz triple $\lambda = 2$. Llamando S_2 al subespacio propio, se tiene que $\dim(S_2) = 1$ y un vector propio es $v_3 = (1,0,1)$, y una base de Jordan es $\{(-1,-1,0), (-1,0,0), (1,0,1)\}$. Por tanto $A = PJP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Con lo que $e^{At} = e^{2t} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

   b) Si la condición inicial es $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces la solución de $\dot{x} = Ax$ es $e^{At}x(0)$.

2. *a*) El signo queda indicado en la siguiente figura



(a)

   b) Primero vamos a probar que todos los puntos de la forma $t = x^4$ son mínimos.
   Sea φ una solución tal que $\dot{\varphi}(t_0) = 0$. Entonces $\ddot{\varphi}(t_0) = 1 - 4\varphi^3(t_0)\dot{\varphi}(t_0) = 1$. Lo que implica que en $t = t_0$, φ tiene un mínimo. Como consecuencia, se tiene que si una solución ingresa en la región $R = \{(t,x): \ t > x^4\}$ entonces no vuelve a salir. Esto último es porque si está en la región R entonces su derivada es positiva y por lo tanto está creciendo. Si suponemos que sale de la región R, tiene que cortar a la curva $t = x^4$ y por lo tanto tendría un mínimo, lo que implica una contradicción.
   Entonces tomamos un compacto K, delimitado en el eje de las ordenadas por la región R y en el eje de las abscisas por un intervalo de la forma $[a,b]$. Una solución φ se tiene que salir de ese compacto K, no se sale por la región R por lo dicho anteriormente, entonces se debe salir en el tiempo, es decir, $(b, \varphi(b)) \in K$, entonces la solución esta definida para un $t > b$.
   Como $K \subset R$ es arbitrario llegamos a que una solución que entra en la región R está definida para todo t.

3. *a*) 1) Ver teórico.
   2) Ver teórico.

   b) 1) Si $x \in [0,1)$, entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$ pues $x^n \to 0$, $f_n(1) = 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y si $x \in (1,2]$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$.
   Por lo tanto $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ 1/2 & \text{si} \quad x = 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$

   2) No converge uniformemente en $[0,2]$ dado que las f_n son continuas para todo $n \in \mathbb{N}$ y la función límite puntual no lo es.

   3) La función límite puntual de h_n es $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ g(x) & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$.
   Utilicemos el criterio del Supremo:
   Sea $|h_n(x) - h(x)| = |g(x)(f_n(x) - 1)|$. Llamamos $M = \max\{g(x) : x \in [0,2]\}$, dado $\varepsilon > 0$,

existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, se tiene que $|g(x)| < \varepsilon$.

- Si $x \in [0, 1-\delta]$, entonces $|h_n(x) - h(x)| = |g(x).f_n(x)| \leq M f_n(x)$. Como f_n es creciente para todo n, el supremo se alcanza en $1-\delta$. Siguiendo el razonamiento, entonces $M \cdot \frac{(1-\delta)^n}{1+(1-\delta)^n} \to 0$.

- Si $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $|h_n(x) - h(x)| \leq \begin{cases} |g(x)||f_n(x)| & \text{si } x \leq 1 \\ |g(x)||f_n(x) - 1| & \text{si } x > 1 \end{cases}$ En ambos casos tanto $|f_n(x)|$ como $|f_n(x) - 1|$ estan acotados por 1 y entonces $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$.

- Si $x \in [1+\delta, 2]$, usamos otra vez que f_n es creciente, entonces $|h_n(x) - h(x)| \leq |g(x)||f_n(x) - 1| \leq M \left| \frac{2^n}{1+2^n} - 1 \right| \to 0$

Como la discusión se realiza en una cantidad finita de zonas, podemos encontrar un momento global para que $M_n = \sup_{x \in [0,2]} |h_n - h(x)| \to 0$.

4. *a*) Para probar que es solución basta sustituir $x(t)$ en la ecuación.
Entonces por un lado tenemos que

$$\dot{x}(t) = -\frac{2t^3}{\sqrt{t^4 + c^4}}$$

Por otro lado

$$\frac{4t^3 x}{t^4 + x^2} = \frac{4t^3(c^2 - \sqrt{t^4 + c^4})}{t^4 + (c^2 - \sqrt{t^4 + c^4})^2} = \frac{4t^3(c^2 - \sqrt{t^4 + c^4})}{t^4 + c^4 - \sqrt{t^4 + c^4}}$$

Entonces basta probar que

$$\frac{4t^3(c^2 - \sqrt{t^4 + c^4})}{t^4 + c^4 - \sqrt{t^4 + c^4}} = -\frac{2t^3}{\sqrt{t^4 + c^4}}.$$

Ésta última igualdad es fácil de verificar.

b) Vamos a probar que la función

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{4t^3 x}{t^4 + x^2} & \text{si} \quad (t, x) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (t, x) = (0, 0) \end{cases}$$

no es localmente Lipschitziana. Supongamos que es localmente Lipschitziana en un entorno de $(0, 0)$ entonces existe $k > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(0, 0)| \leq k|x - 0|.$$

sustituyendo queda

$$\left| \frac{4t^3 x}{t^4 + x^2} \right| \leq k|x|$$

simplificando queda

$$\frac{|4t^3|}{t^4 + x^2} \leq k$$

Tomando la restricción $x = t^2$ nos que $\frac{2}{t} \leq k$. Haciento $t \to 0$ llegamos a una contradicción.