Ecuaciones Diferenciales
Primer parcial

26 de setiembre de 2015.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1 Considere la ecuación $\dot{x} = Ax$, donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) Definir solución estacionaria (o punto crítico) de la ecuación.

b) Definir estabilidad y estabilidad asintótica de una solución estacionaria.

c) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Calcular la matriz e^{At}.

ii) Hallar la solución de $\dot{x} = Ax$ que cumple $x(0) = (1, 2)$.

iii) Dibujar el diagrama de fase.

iv) Estudiar la estabilidad del punto crítico.

Ejercicio 2 1) Determine la solución de la ecuación $xx' - (1 + x^2)t^2 = 0$ con condición inicial $x(0) = 1$ y probar que el intervalo maximal de definición contiene a $[0, +\infty)$. Llamemos u a dicha solución.

2) Considere la ecuación:

(*) $$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

en donde

$$F(t,x) = \frac{2}{\pi}\frac{1+x^2}{x}t^2 \arctan(x+t)\,.$$

i) Determine el dominio de definición de F.

ii) Verifique que (*) se encuentra en las hipótesis del Teorema de Picard.

iii) Sea $v : I \to \mathbb{R}$ la solución maximal de (*). Probar que $v(t) \le u(t)$ para todo $t \ge 0$ en el intervalo I.

iv) Probar que el intervalo maximal I de definición de v contiene a $[0, +\infty)$.

Ejercicio 3 *a*) Sea (f_n) una sucesión de funciones, tales que $f_n : X \to \mathbb{R}$ continuas para todo n. Probar que si f_n converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{R}$, entonces f es continua.

b) Para cada n, sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = (x^2 - 2)^n$.

i) Estudiar convergencia puntual y uniforme.

ii) Sea $f_n : (1, \sqrt{3}) \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = (x^2 - 2)^n$. Estudiar convergencia uniforme.